** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Podstawy geometrii} renewcommand{thethm}{} Dzisiaj postaramy się udowodnić twierdzenia, które zwykle podawane są bez dowodu. Są to dość podstawowe twierdzenia, więc będziemy używać dość skromnych środków dowodowych: podobieństwa trójkątów, równości kątów wierzchołkowych i naprzemianległych, obrotów i symetrii, twierdzenia Talesa. Przypomnijmy, że już udowodniliśmy (co prawda przy pomocy Pitagorasa), że: begin{enumerate} item begin{thm}[Okrąg opisany na trójkącie] Istnieje dokładnie jeden okrąg opisany na danym trójkącie ABC. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków AB, BC, CA, zwykle oznaczanym O.end{thm} item begin{thm}[Okrąg wpisany] Istnieje dokładnie jeden okrąg wpisany w trójkąt ABC. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów $angle CAB, angle ABC, angle BCA$, zwykle oznaczanym I.end{thm} item begin{thm}[Istnienie ortocentrum] Wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie zwanym emph{ortocentrum} trójkąta, zwykle oznaczanym H.end{thm} end{enumerate} paragraph{Udowodnij:} begin{enumerate} item begin{thm}[Pitagorasa] Jeżeli trójkąt ABC jest prostokątny z przeciwprostokątną AC, to $$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$ end{thm} item begin{thm}[o kącie wpisanym i środkowym] Dany jest okrąg o środku w O oraz punkty A, B, C leżące na tym okręgu. Wtedy $$angle AOB = 2angle ACB$$ gdzie kąt AOB jest brany odpowiednio -- kąt wklęsły jeżeli $angle ACB > 90deg$. end{thm} item begin{thm}[Równość kątów wpisanych] Punkty A,B,C,D leżą na okręgu, przy czym C i D leżą na tym samym łuku AB. Wtedy $$angle BCA = angle BDA$$ end{thm} item begin{thm}[O kącie między styczną a cięciwą] Niech prosta AX będzie emph{styczna} do okręgu o w punkcie A, zaś BA będzie emph{cięciwą} okręgu o. Jeżeli punkt C leży na okręgu o, przy czym kąty $angle ACB,angle XAB$ są oba ostre lub rozwarte, to $$angle ACB = angle XAB$$ includegraphics{tang.pdf} end{thm} emph{Ten idiotyczny warunek z rozwartością lub ostrością kątów omija przypadek gdy punkt X leży po drugiej stronie A. Można byłoby napisać ``jak na rysunku'' albo coś równie nieprecyzyjnego.} item begin{thm} Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $angle ACB = angle ADB$. end{thm} item begin{thm} Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $angle ABC + angle ADC = 180deg$. end{thm} item begin{thm}[Istnienie środka masy] W trójkącie ABC trzy środkowe tj. proste łączące wierzchołki ze środkami przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywamy emph{środkiem masy} trójkąta ABC i oznaczamy M. Punkt M dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$ licząc od wierzchołka. end{thm} emph{Oznaczenie tego punktu jako środka masy stanie się naturalniejsze, gdy powiemy więcej o masie.} end{enumerate} emph{Uwaga: wszystkie powyższe nazwy są opcjonalne tj. nie będę wymagać ich używania. Tym niemniej są one standardowe i sam będę ich używać.} paragraph{Zastosowania} begin{enumerate} item Udowodnij, że jeśli w trójkącie ABC dwusieczna kąta $angle CAB$ oraz wysokość opuszczona z wierzchołka A pokrywają się, to trójkąt jest równoramienny. item Udowodnij, że jeśli w trójkącie ABC środkowa i wysokość opuszczone z wierzchołka A pokrywają się, to trójkąt jest równoramienny. item Środek okręgu opisanego i środek masy trójkąta ABC pokrywają się. Znajdź możliwe wartości miar kątów ABC. Czy umiesz rozwiązać podobne zadanie, jeżeli założymy, że inne z punktów szczególnych (środek okręgu wpisanego, opisanego, ortocentrum, środek masy) pokrywają się? item Niech M będzie środkiem masy trójkąta ABC, punkty A_1,B_1,C_1 będą środkami boków BC, CA, AB odpowiednio. Udowodnij, że pola trójkątów $AB_1M, CB_1M, CA_1M, BA_1M, BC_1M, AC_1M$ są równe. end{enumerate} end{document}