** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: nie maj 16 02:00 2010 C % Last Change: nie maj 16 02:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{Źródło: #1} begin{document} renewcommand{thethm}{} section{Mało zadań z małego twierdzenia Fermata} paragraph{Teoria} begin{enumerate} item begin{thm}[Małe twierdzenie Fermata] Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p, to $$a^{p-1} equiv 1 mod p.$$ end{thm} item begin{thm}[Małe twierdzenie Fermata, równoważnie] Jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś a jest liczbą całkowitą, to $$a^p equiv a mod p.$$ end{thm} emph{Wypadł tutaj warunek $pnot|a$.} item begin{defn} Liczbę takich $ain left{ 1,2,dots,n right}$, że a jest względnie pierwsze z n, oznaczam jako $phi(n)$. end{defn} emph{Uwaga:} Załóżmy, że $n=p_1^{a_1} cdot p_2^{a_2} dots p_k^{a_k}$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze. Wtedy $$phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1})dots(p_n^{a_n} - p_n^{a_n - 1}).$$ Np. $phi(12) = phi(2^2cdot 3) = (2^2 - 2)(3-1) =

4$. Faktycznie liczby względnie pierwsze z 12 i nie większe od 12 to liczby $1,5,7,11$. item begin{thm}[Lagrange'a] Niech n będzie liczbą naturalną, zaś a liczbą całkowitą względnie pierwszą z n tj. $NWD(a,n)=1$. Wtedy $$a^{phi(n)} equiv 1 mod n,$$ gdzie $phi(n)$ jest zdefiniowane jak wyżej. end{thm} end{enumerate} paragraph{Dowody teorii} begin{enumerate} item Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś a będzie liczbą niepodzielną przez p. begin{enumerate} item Dowiedź, że jeżeli $k,lin mathbb{Z}$ są takie, że $$ka equiv la mod p$$ to $k equiv l mod p$. item Uzasadnij, że $${a mod p, 2amod p,dots, (p-1)a mod p} = {1,2,dots,p-1}$$ gdzie $xmod p$ oznacza resztę z dzielenia x przez p. item Pokaż, że zachodzi $$acdot 2acdot 3a cdot ldots cdot (p-1)a equiv (p-1)! mod p.$$ item Udowodnij małe twierdzenie Fermata (w 1. wersji). item Udowodnij, że obie wersje małego twierdzenia Fermata są równoważne. end{enumerate} item Rozszerz powyższy dowód twierdzenia Fermata do dowodu twierdzenia Lagrange'a. emph{Wskazówka: Jaki zbiór należy wziąć zamiast $left{ amod p, 2a mod p,dots,(p-1)amod pright}$?} item Uzasadnij, że z twierdzenia Lagrange'a wynika małe twierdzenie Fermata. end{enumerate} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą, to $$30 | n^5 - n$$ item Niech $ngeq 1$ będzie liczbą naturalną, zaś $x_1,x_2,dots,x_n$ liczbami całkowitymi, których suma dzieli się przez 10. Udowodnić, że liczba $$x_1^5 + x_2^5 + dots + x_n^5$$ jest również podzielna przez 10. source{PTM 2009, kl. I} item Wykazać, że jeżeli x i y są liczbami całkowitymi, to liczba $$xy^5 - x^5y$$ jest podzielna przez 30. source{PTM 2007, kl. I} item Wykazać, że jeśli $p_1,p_2,dots,p_{56}$ są liczbami pierwszymi większymi od 7, to liczba $$p_1^6 + dots + p_{56}^6$$ jest podzielna przez 56. source{PTM 2005, kl. II} emph{Uwaga: Przy dowodzeniu podzielności przez 8 być może trzeba coś policzyć.} end{enumerate} end{document}