** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zadania.tex % Created: wto gru 22 02:00 2009 C % Last Change: wto gru 22 02:00 2009 C % documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} subimport{../}{style} %include{style} begin{document} section{Różne geometrie} begin{enumerate} item Niech BD będzie dwusieczną w trójkącie ABC, przy czym $Din AC$, oraz M będzie środkiem AC. Prosta BD przecina okrąg opisany na ABC w punkcie $Eneq B$. Okrąg o średnicy DE przecina okrąg opisany na ABC w punkcie $Fneq E$. Udowodnić, że prosta BF jest symetryczna do środkowej BM

względem dwusiecznej BD (jest emph{symedianą}). item Okręgi o_1 i o_2 są wzajemnie styczne oraz styczne zewnętrznie do prostej k w punktach A i C. Odcinek AB jest średnicą o_1. Prosta BD jest styczna do o_2 w punkcie D. Udowodnij, że $|BD| = |BA|$. item Dane są okręgi $o_1 neq o_2$ wpisane w kąt. Okrąg o_1 jest styczny do jednego z ramion w punkcie A, okrąg o_2 jest styczny do drugiego z ramion w punkcie B. Prosta AB przecina o_1 w E i o_2 w F. Udowodnić, że $|AE| = |BF|$. item Okrąg o środku w I jest wpisany trójkąt ABC i styczny do AB w punkcie D. Okrąg dopisany do boku AB jest styczny do tego boku w E. Udowodnić, że $$|AD| = |BE|$$ item Okręgi o_1,o_2 są stycznie wewnętrznie do okręgu o w P i Q odpowiednio. Wspólna styczna zewnętrzna k tych okręgów jest styczna do o_1 w punkcie A zaś do o_2 w B, przy czym P i Q leżą po tej saej stronie prostej k. Udowodnij, że PA, BQ przecinają się na okręgu o. item Dany jest trójkąt ABC, punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt $I neq O$ jest środkiem okręgu wpisanego. Trzy okręgi o równych promieniach przecinają się w punkcie P, ponadto każdy z nich jest styczny wewnętrznie do dwóch boków trójkąta ABC. Udowodnić, że P, I, O są współliniowe. item * (wymaga tylko cierpliwości) Wykazać, że w 30-kącie foremnym $A_1A_2dots A_{30}$ przekątne $$A_1A_{19}, A_3A_{24}, A_8A_{28}$$ przecinają się w jednym punkcie. end{enumerate} footnotesize{Zadania pochodzą ze Staszica, MIMUWu oraz z rosyjskich olimpiad dla gimnazjalistów} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: elem_rozw.tex % Created: nie sty 10 07:00 2010 C % Last Change: nie sty 10 07:00 2010 C % documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defmb#1{mathbb{#1}} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} title{Elementarne rozwiązanie zadania o 30-kącie} date{} author{Joachim Jelisiejew} maketitle paragraph{Zadanie} Udowodnić, że w 30-kącie foremnym przekątne $A_1A_{19}, A_3A_{24} hbox{ oraz } A_8A_{28}$ przecinają się w jednym punkcie. paragraph{Rozwiązanie} begin{enumerate} item Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na 30-kącie oraz niech P będzie przecięciem $O A_{30}$ z $A_{8}A_{28}$. Udowodnię, że P jest szukanym punktem. item begin{lem} Punkty O i A_3 są symetryczne względem prostej $A_{8} A_{28}$. end{lem} Dowód:\

$angle A_{3}O A_{28} = 10cdot 6deg = 60deg$. Trójkąt $ A_{3}O A_{28}$ jest więc równoboczny, analogicznie $ A_{3}O A_{8}$ jest równoboczny, a z tego wynika teza. item Udowodnię, że $ A_{3} A_{24}$ przechodzi przez P. Zauważmy, że z lematu wynika, że $angle O A_{3}P = angle A_3OP = angle A_3O A_{30} = 6cdot 6deg$. Ponieważ zachodzi również $angle O A_{3} A_{24} = 6 cdot 6deg$ oraz punkty P, A_{24} leżą z tej samej strony OA_3, to dowód jest zakończony. item Pozostaje udowodnić, że $ A_{1} A_{18}$ przechodzi przez P. item Udowodnię pomocniczo, że $|A_{1}P| = | A_{1} A_{3}|$.\ Zauważmy, że obrót o $6cdot 6deg$ przenosi $O A_{3}$ na $O A_{6}$, zaś $ A_{28}$ na $ A_{1}$, więc z lematu wynika $$| A_{1}O| = | A_{1} A_{6}|$$ Zauważmy, że $O A_{6} || A_3A_{24} = A_3P$ oraz $angle O A_{6}A_3 = angle A_{6}OP = 12cdot 6deg$, więc czworokąt $PO A_{6} A_{3}$ jest trapezem równoramiennym, punkt A_1 leży na symetralnej jednej jego podstawy, a więc leży także na symetralnej drugiej podstawy. item Skoro $|A_{1}P| = | A_{1} A_{3}|$ to $$angle A_3A_1P = 180deg - 2angle PA_3A_1 = 180deg - 14cdot 6deg = 16cdot 6deg = angle A_3A_1A_{18}$$ tak więc punkty A_1, P, A_{18} leżą na jednej prostej, co kończy dowód. end{enumerate} end{document}