



[](#)
[Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
% File: zad.tex % Created: czw maj 13 11:00 2010 C % Last Change: czw maj 13
11:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath}
textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep
0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc}
usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} %
----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small %
THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]
newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{}
newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}[1][Dowód. ]{{noindenttextsc{#1}}
{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{
noindenttextsc{#1}} {par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{\circ}}
subimport{.}{style} %include{style} defsourc#1{\Źródło: #1} begin{document}
section{Dirichlet} paragraph{Teoria:} begin{enumerate} item Dirichlet jest wszędzie, nawet
tam, gdzie się go nie spodziewasz... Bądź ostrożny, żeby Cię nie dopadł :) item
begin{thm}[Zasada szufladkowa, Dirichleta, gniazd gołębic ...] Jeżeli mamy  $n+1$ 
przedmiotów i  $n$  szufladek i wkładamy przedmioty do szufladek, to w pewnej szufladce będą
2 przedmioty.end{thm} item Inne często używane sformułowanie: Jeżeli mamy  $n$ 
przedmiotów i  $n$  szufladek i wkładamy przedmioty do szufladek tak, że w żadnej szufladce nie
ma więcej niż jednego przedmiotu, to  $\textbf{każda}$  szufladka jest niepusta. end{enumerate}
paragraph{Zadanka normalne} begin{enumerate} item Danych jest 6 punktów o
współrzędnych całkowitych na płaszczyźnie. Udowodnić, że środek pewnego odcinka o
końcach w tych punktach ma współrzędne całkowite. item Uzasadnij, że wśród siećciu
osób są trzy, z których każde dwie znają się, lub trzy, z których żadne dwie nie znają
```

się. item Udowodnij, że wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych istnieją dwie, których reszty z dzielenia przez n są równe. item W turnieju szachowym startuje $2n$ zawodników. Każda para rozgrywa dokładnie jeden mecz. Udowodnić, że w każdej chwili turnieju istnieje 2 graczy, którzy rozegrali (do końca) po tyle samo partii. item Niech $n \in \mathbb{Z}$ i niech a_1, a_2, \dots, a_n będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieją takie $1 \leq k \leq l \leq n$, że $a_k + a_{k+1} + \dots + a_l$ jest podzielne przez n . item Udowodnij "słabsze twierdzenie Fermata": dla danej liczby pierwszej p i dodatniej liczby a istnieje takie n , $2 \leq n \leq p + 1$, że $p \mid a^n - a$. A czy istnieje takie n wśród liczb $\{2, 3, \dots, p\}$? end{enumerate}

paragraph{Poziom pro} begin{enumerate} item Uzasadnij, że istnieje liczba złożona (w zapisie dziesiętnym) z cyfr $0, 9$ i podzielna przez 123456789 . item Pomiedzy każdymi z dwoma z 17 planet istnieje połączenie hiperprzestrzenne. Połączenia są obsługiwane przez firmy: "UFO ltd.", "NASA shuttle", "Overlord transport". Uzasadnić, że pomiędzy pewnymi trzema planetami wszystkie połączenia są obsługiwane przez tę samą firmę. end{enumerate} paragraph{Master class}

begin{enumerate} item Dla dowolnej liczby naturalnej n względnie pierwszej z 10 udowodnij, że istnieje liczba podzielna przez n mająca w zapisie po tyle samo cyfr $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. item Jocz przygotowuje się do Olimpiady. Załatwił sobie zwolnienie na 11 tygodni (!!!). W tym czasie zamierza dziennie robić co najmniej 1 zadanko, ale w każdym pełnym tygodniu nie zrobić więcej niż 12 zadań (żeby się nie przemęczać). Udowodnij, że istnieją takie a, b , że od dnia a do dnia b (włącznie) Jocz rozwiązał dokładnie 21 zadań. end{enumerate} end{document}