Zadania przygotowała (oraz kółko poprowadziła) Ola Baranowska.

** **
Zadania PDF.

Zadania w docu.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło rozwiązań w texu.

% File: rozw.tex % Created: wto lut 23 03:00 2010 C % Last Change: wto lut 23 03:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Co Ty wiesz o kombinowaniu?} author{Ola Baranowska} begin{enumerate} item W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt. rozw Wybieramy punkt A, z którego wychodzi najwięcej narysowanych odcinków. Pokażemy najpierw, że z punktu A wychodzą co najmniej 4 odcinki.\ Przypuśćmy więc, że jest inaczej. Z każdego punktu wychodzą zatem co najwyżej 3 odcinki. Ponieważ mamy 6 punktów, więc łącznie mamy co najwyżej $6 cdot 3 = 18$ końców tych odcinków, a więc mamy co najwyżej 9 narysowanych odcinków. To jednak jest sprzeczne z założeniem.\ Z punktu A wychodzą zatem co najmniej 4 odcinki: $AB, AC, ADhbox{ i }AE$. Teraz zauważamy, że 6 punktów można połączyć dokładnie $displaystyle{binom{6}{2} = 15}$ odcinkami. Zatem wśród 6 odcinków $$BC, BD, BE, CD, CE hbox{ i }DE$$ narysowano co najmniej jeden. Końce tego odcinka wraz z punktem A są wierzchołkami narysowanego trójkąta. item W turnieju uczestniczy $2n$ graczy; każdych dwóch gra ze sobą co najwyżej raz. Udowodnij, że jeśli nie istnieje trojka graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze, to łączna liczba rozegranych meczów nie przekracza n^2. rozw Wybieramy gracza A, który rozegrał najwięcej gier. Niech k będzie liczbą gier rozegranych przez gracza A i niech S będzie zbiorem graczy, z którymi gracz A grał.\ Niech T będzie zbiorem tych graczy, z którymi gracz A nie grał. Oczywiście zbiór T ma $2n-k-1$ elementów. Zauważmy, że gracze ze zbioru S nie grali ze sobą. Gdyby bowiem gracze $B,C in S$ grali ze sobą, to razem z graczem A tworzyliby trojkę graczy, którzy rozegrali ze sobą wszystkie trzy mecze.\ Zatem w każdym meczu musiał uczestniczyć gracz A lub któryś z graczy ze zbioru T. Każdy z tych graczy rozegrał jednak co najwyżej k gier (gdyż A wybraliśmy jako tego, kto rozegrał najwięcej). Zatem liczba wszystkich gier jest nie większa od $k + (2n - k - 1)cdot k$ i pozostaje nam udowodnić nierówność $$k + (2n - k - 1) cdot k leq n^2$$ równoważną $$(2n - k) cdot k leq n^2$$ $$sqrt{(2n - k) cdot k} leq frac{(2n - k) + k}{2}$$ czyli nierówności pomiędzy średnimi. item W każdej z trzech szkół uczy się n uczniów. Każdy uczeń ma w pozostałych szkołach razem co najmniej $n + 1$ znajomych. Udowodnij, że z każdej szkoły można wybrać po jednym uczniu tak, że wszyscy wybrani uczniowie się znają. rozw Wybieramy ucznia mającego największą liczbę znajomych w jednej z pozostałych szkół. Przypuśćmy, że tym uczniem jest uczeń A ze szkoły S_1. Zakładamy, że w szkole S_2 zna on k uczniów, przy czym liczba k jest wspomnianą największą liczbą znajomych.\ Ponieważ uczeń A nie może znać $n + 1$ uczniów w szkole S_2 (ma ona n uczniów), więc zna co najmniej jednego ucznia w szkole S_3; niech tym uczniem będzie B. Uczeń B zna co najwyżej k osób w szkole S_1, a więc zna co najmniej $n + 1 - k$ uczniów w szkole S_2. Gdyby znajomi uczniów A i B w szkole S_2 tworzyli dwa zbiory rozłączne, to szkoła S_2 miałaby co najmniej $k+(n+1-k) = n+1$ uczniów, co jest sprzeczne z założeniem.\ Zatem w szkole S_2 istnieje uczeń znający zarówno A jak i B; wraz z uczniami A i B tworzy on szukaną trojkę uczniów. item W konferencji bierze udział $2n$ osób. Każdy uczestnik konferencji ma wśród pozostałych uczestników co najmniej n znajomych. Udowodnij, że wszystkich uczestników konferencji można zakwaterować w pokojach dwuosobowych tak, by każdy uczestnik mieszkał ze swoim znajomym. source{XLV OM} rozw Wybieramy największą liczbę rozłącznych par znajomych: $${a_1, b_1}, {a_2, b_2}, dots, {a_m, b_m}$$ Jeśli $m = n$, to te pary kwaterujemy w oddzielnych pokojach. Niech więc $m < n$.\ Z maksymalności m wynika, że żadne dwie pozostałe osoby nie znają się. Wybieramy dwie z nich: x i y. W każdej parze ${a_i, b_i}$ zliczamy znajomych x i y. Jeśli w każdej parze osoby x i y znają co najwyżej 2 osoby, to mają łącznie co najwyżej $2m < n+n$ znajomych, wbrew założeniu.\ Istnieje zatem para, w której znają łącznie co najmniej 3 osoby. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że osoba x zna obie osoby a_i i b_i, a osoba y zna osobę a_i. Zastępując parę ${a_i, b_i}$ parami ${x, b_i}$ oraz ${y, a_i}$, otrzymujemy $m + 1$ rozłącznych par znajomych, wbrew wyborowi liczby m. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $m = n$. end{enumerate} end{document}