PROS 09 -- mecz matematyczny

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 19:34 -

Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} include{style} begin{document} section{PROSERWY - mecz matematyczny} begin{enumerate} item level{2-3} Liczby dodatnie a,b,c spełniają $abc=1$. Udowodnij, że $$frac{a}{b} + frac{b}{c} + frac{c}{a} geq a + b + c$$ source{?} %podstawienie a=x/y item level{2-3} Udowodnij, że dla liczb dodatnich a,b,c zachodzi $$frac{a}{b+c} + frac{b}{a+c} + frac{c}{a+b} leq frac{3}{2}frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca}$$ source{Mathlinks} %dodawanie 1 do stron %item level{2} Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym AB jest krótsze od pozostałych boków. Punkt D leży na boku AC i spełnia $|DA| = |AB|$. Punkt F jest taki, że $ADFB$ jest rombem, zaś K oznacza punkt przecięcia DF z BC. Obliczyć $displaystyle{frac{CK}{BK}}$. item level{3} W kąt o wierzchołku X wpisano okręgi o_1,o_2. Okrąg s jest styczny zewnętrznie do o_1 w A i do o_2 w B. Udowodnić, że punkty A,B,X są współliniowe. Czy założenie, że s jest styczny emph{zewnętrznie} jest potrzebne?source{Staszic} %jednokladnosc item level{2} Okrąg o środku w O został podzielony przez $n>2$ średnic na $2n$ przystających fragmentów. Pokazać, że rzuty dowolnego punktu $Mneq O$ należącego do wnętrza okręgu na te średnice są wierzchołkami n kąta foremnego.source{Staszic} item level{2} Każdy punkt płaszczyzny jest pokolorowany jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wierzchołki są jednego koloru. source{Mathlinks} %palowanie item level{1} 2009

uczestników obozu naukowego stoi w serwerowni. Odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Każdy z nich ma jedną piłkę. Jednocześnie rzucają oni piłki, każdy najbliżej stojącemu uczestnikowi. Udowodnić, że żaden uczestnik nie dostanie więcej niż 5 piłek. source{Mathlinks}   item level{2} Mamy daną tablicę $ntimes n$, której każde pole jest pokolorowane. Wiadomo, że żadne dwa rzędy nie są pokolorowane jednakowo. Udowodnić, że można wykreślić pewną kolumnę tak, że nadal żadne dwa rzędy nie będą pokolorowane jednakowo. source{Mathlinks}   item level{1} Niech M będzie liczbą całkowitą parzystą, $a_0,a_1,a_2,dots,a_{M-1}$ będą liczbami całkowitymi dającymi parami różne reszty z dzielenia przez M, a $c_i = a_i + i$ dla $i=0,1,2,dots,M-1$. Udowodnij, że istnieją takie $ineq j$ całkowite, że $c_i equiv c_j mod M$. source{Mathlinks}   item level{2} Wielomian $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + dots + a_0$ jest taki, że $a_iin {-1,1}$. Udowodnić, że nie ma on pierwiatków zawartych w $(-infty, -2] cup [2, infty)$. source{known}   item level{2} Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Niech $$frac{k}{l} = frac{1}{1} + frac{1}{2} + dots + frac{1}{p-1}$$ gdzie k,l są całkowite. Udowodnić, że $p|k$. source{known}   end{enumerate} end{document}