** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Do boju (na trudniejszym odcinku walk)} maketitle begin{enumerate} item Wykazać, że dla dowolnych liczb $a,b>0$ zachodzi [a^3b+ab^3+2a^3+2b^3+2geq 2a^2b+2ab^2+a^2+b^2+2ab] item Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n człopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r+sleq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione. item Znaleźć wszystkie takie trójki liczb całkowitych dodatnich większych od 1 takich, że kwadrat każdej z nich pomniejszony o jeden jest podzielny przez każdą z pozostałych. item Odcinki AD,BE,CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, zaś H jest jego ortocentrum (puntem przecięcia wysokości). Prosta przechodząca przez E i środek odcinka CH przecina odcinek CD w punkcie T, zaś odcinki DF i BH przecinają się w S. Udowodnij, że $STperp AB$. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Do boju (na trudniejszym odcinku walk)} maketitle begin{enumerate} item Wykazać, że dla dowolnych liczb $a,b>0$ zachodzi [a^3b+ab^3+2a^3+2b^3+2geq 2a^2b+2ab^2+a^2+b^2+2ab] textbf{Rozwiązanie}: W tej nierówności skorzystamy ze średniej ważonej (choć tylko dla wag wymiernych). Spróbujmy poskładać z lewej strony prawą (nierówność nie ma jednego stopnia, więc większość nierówności się nie przyda).\ Wyraz a^2 możemy złożyć tylko z tego, co nie ma b, z a^3 i 2. Ze średniej ważonej chcemy uzyskać a^2, ważąc $alpha a^3+(1-alpha)$. Mamy $alpha a^3+(1-alpha)geq a^{3alpha}$. Bierzemy więc $alpha=frac{2}{3}$ i uzyskujemy [frac{2}{3}a^3+frac{1}{3}geq a^2] [frac{2}{3}b^3+frac{1}{3}geq b^2] Druga nierówność wytworzona jest analogicnie do pierwszej. Idźmy dalej: chcemy teraz pozbyć się z lewej strony a^3b i ab^3 (bo a^3, b^3 są znacznie poręczniejsze), robiąc z nich (z lekkich dodatniem wody w postaci stałej 1), piękne danie a^2b. Mamy $alpha a^3b+beta ab^3+(1-alpha+beta)geq a^{3alpha+beta}b^{3beta+alpha}$. Chcemy $3alpha+beta=2$, $3alpha+beta=1$. Obliczamy $alpha=frac{5}{8}$, $beta=frac{1}{8}$, czyli: [frac{5}{8}a^3b+frac{1}{8}ab^3+frac{1}{4}geq a^2b] [frac{5}{8}ab^3+frac{1}{8}a^3b+frac{1}{4}geq ab^2] Chcemy oczywiście, mając zamiłowanie do porządku, upiec tyle samo a^2b, co ab^2. Na jedną porcję idzie nam $frac{6}{8}a^3b$ i $frac{6}{8}ab^3$ oraz $frac{1}{2}$. Upieczemy więc $frac{4}{3}$ porcji: [frac{4}{3}(frac{5}{8}a^3b+frac{1}{8}ab^3+frac{1}{4})= frac{5}{6}a^3b+frac{1}{6}ab^3+frac{1}{3}geq frac{4}{3}a^2b] [frac{4}{3}(frac{5}{8}ab^3+frac{1}{8}a^3b+frac{1}{4})= frac{5}{6}ab^3+frac{1}{6}a^3b+frac{1}{3}geq frac{4}{3}ab^2] Upichciliśmy już $a^2,b^2,frac{4}{3}a^2b,frac{4}{3}ab^2$. Zostało nam do zrobienia $frac{2}{3}a^2b,frac{2}{3}ab^2,2ab$, a z produktów mamy $frac{4}{3}a^3,frac{4}{3}b^3,frac{2}{3}$. Tutaj już nie potrzeba aż tak dużo talentu kulinarnego: Mamy $frac{2}{3}a^3+frac{1}{3}b^3geq a^2b$, czyli [frac{4}{9}a^3+frac{2}{9}b^3geq frac{2}{3}a^2b] [frac{4}{9}b^3+frac{2}{9}a^3geq frac{2}{3}ab^2] Zostało $(frac{4}{3}-frac{6}{9}=frac{2}{3})a^3$, $frac{2}{3}b^3$, $frac{2}{3}$. Robimy z tego eintopf: [2(frac{1}{3}a^3+frac{1}{3}b^3+frac{1}{3})geq 2a^{3frac{1}{3}}b^{3frac{1}{3}}=2ab] Koniec, można siadać do stołu. item Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n członpców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r+sleq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.\ textbf{Rozwiązanie}: W rozwiązaniach tego testu dla grupy młodszej. item Znaleźć wszystkie takie trójki liczb całkowitych dodatnich większych od 1 takich, że kwadrat każdej z nich pomniejszony o jeden jest podzielny przez każdą z pozostałych.\ textbf{Rozwiązanie}: Nazwijmy 3 liczby z zadania przez a,b,c. Zauważmy, że a,b,c są parami względnie pierwsze (tj. każda para z tych liczb jest względnie pierwsza). Faktycznie, niech np. $d|a,b$. Wtedy, skoro $a|b^2-1$, to $d|b^2-1$ i $d|b^2$, czyli $d|-1$, $d=1$, dla pozostałych par analogicznie.\ Skoro liczby są względnie pierwsze, to np. $a|b^2-1$ i $c|b^2-1$ implikuje $ac|b^2-1$. Mamy więc: [ab|c^2-1,ac|b^2-1,bc|a^2-1] Niech, bez straty ogólności, bo podzielności są cykliczne, $c=min(a,b,c)$. Mamy $ab|c^2-1$ i $ab,c^2-1>0$, więc $ableq c^2-1$. Ale $ageq c$ i $bgeq c$, czyli $abgeq c^2>c^2-1$. Sprzecznośc dowodzi, że takich trójek liczb nie ma. item Odcinki AD,BE,CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, zaś H jest jego ortocentrum (punktem przecięcia wysokości). Prosta przechodząca przez E i środek odcinka CH przecina odcinek CD w punkcie T, zaś odcinki DF i BH przecinają się w S. Udowodnij, że $STperp AB$.\ textbf{Rozwiązanie}: Nieco inne niż na kółku, dzięki uproszczeniom Endrju.\ Wystarczy, że pokażemy, że $ST||CF$. Zrobimy to używając tw. Talesa.\ Oznaczmy $angle BAC=alpha$, $angle ACB=gamma$. Pamietamy (por. młodsze zadania), że na $AEHF$, $CEHD$, $BFHD$ da się opisać okręgi, oraz, że CEH jest prostokątny.\ Obliczamy $angle DFB=90^{circ}-angle DFH=90^{circ}-angle DBH=gamma$, $angle SBF=90^{circ}-alpha$, $angle CEM=angle ECM=90^{circ}-alpha$. Stąd, że cechy kąt-kąt-kąt: [triangle CETsimeq triangle FBS] Stąd wynika $frac{CT}{CE}=frac{FS}{BF}$. Dalej $angle FDB=angle FHB=angle CHE=angle CDE$, stąd [triangle CED simeq triangle FBD] Stąd $frac{CD}{CE}=frac{FD}{BF}$. Dzieląc przez to stronami $frac{CT}{CE}=frac{FS}{BF}$ otrzymujemy $frac{CT}{CD}=frac{FS}{FD}$, czyli $1-frac{TD}{CD}=1-frac{SD}{FD}$, a więc [frac{TD}{CD}=frac{SD}{FD}] To kończy dowód. end{enumerate} end{document}