** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Do boju} maketitle begin{enumerate} item Wykazać, że jeśli $a+b+c=1$ oraz $a,b,c>0$ to [a^4+b^4+c^4geq frac{1}{27}] item Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n człopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r+sleq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione. item Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg liczb naturalnych (a_n), że dla dowolnej liczby naturalnej k w ciągu $a_1+k,a_2+k,cdots$ jest skończenie wiele liczb pierwszych. item Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym,

AD,BE,CF jego wysokościami, a H punktem przecięcia tych wysokości. Udowodnij, że $angle EFH=angle DFH$ (z czego wynika, że H jest środkiem okręgu wpisanego w DEF). end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Do boju} maketitle begin{enumerate} item Wykazać, że jeśli $a+b+c=1$ oraz $a,b,c>0$ to [a^4+b^4+c^4geq frac{1}{27}] textbf{Rozwiązanie}: Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową dla liczb a^2,b^2,c^2 mamy [sqrt{frac{a^4+b^4+c^4}{3}}geq frac{a^2+b^2+c^2}{3}], [sqrt[4]{frac{a^4+b^4+c^4}{3}}geq sqrt{frac{a^2+b^2+c^2}{3}}] Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową dla liczb a,b,c jest [sqrt{frac{a^2+b^2+c^2}{3}}geq frac{a+b+c}{3}] Stąd i z założenia mamy [sqrt[4]{frac{a^4+b^4+c^4}{3}}geq sqrt{frac{a^2+b^2+c^2}{3}}geq frac{a+b+c}{3}=frac{1}{3}] Po podniesieniu do 4. potęgi i pomnożeniu obu stron przez 3 dostajemy tezę. item Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n człopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r+sleq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.\ textbf{Rozwiązanie}: Niech a_{ij} mówi, czy człopak i lubi dziewczynę j: $a_{ij}=1$ jeżeli lubi, a 0 inaczej. Analogicznie niech b_{ji} mówi, czy dziewczyna j lubi chłopaka i.\ Liczb a_{ij} i b_{ji} jest po n^2. Wśród tych liczb jest $(r+s)n$ jedynek i reszta zer.\ Jeżeli dla wszystkich par (i,j) byłoby uczucie nieodwzajemnione, to $a_{ij}=0 vee b_{ji}=0$. Wtedy mielibyśmy najwyżej n^2 jedynek (bo w każdej z n^2 rozłącznych par liczb a_{ij},b_{ji} jest najwyżej jedna 1), czyli $(r+s)nleq n^2$, $r+sleq n$. To zaś pokazuje (rozumujemy przez zaprzeczenie), że jeśli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem.\ Musimy teraz znaleźć, dla dowolnych n, $r,s:r+sleq n$, takie ustawienie lubień, że żadne uczucie nie jest odwzajemnione.\ Jeżeli $r=0$ lub $s=0$, to łatwo da się je znaleźć. Załóżmy dalej, że $r,s>0$.\ Niech chopcy i dziewczyny będą ponumerowani od 0 do $n-1$. Niech będzie tak, że chłopak i lubi dziewczyny $i,i+1 mod n,i+2 mod n,cdots,i+s-1 mod n$ (ew. żadnej, jeżeli $s=0$) i niech dziewczyna j lubi chłopców $j+1 mod n,j+2 mod n,cdots, j+r mod n$.\ W tym ustawieniu każdy chłopak lubi s dziewczyn i każda dziewczyna lubi r chłopców. Ponadto każde lubienie jest nieodwzajemnione. Faktycznie załóżmy, że i,j są takie, że chłopak i lubi dziewczynę j. Stąd [jin{i,i+1 mod n,i+2 mod n,cdots,i+s-1 mod n}] Niech

$j=i+k mod n$. Żeby dziewczyna j lubiła chłopaka i musi być $iin{j+1 mod n,j+2 mod n,cdots,j+r-1 mod n}$, czyli $iin{i+k+1mod n,i+k+2mod n,cdots,i+k+r-1 mod n}$, czyli $0in{k+1mod n,k+2mod n,cdots,k+r-1 mod n}$. Ale $kgeq0$ i $k+rleq r+s-11$ na pewno wyrazy $a_k+k=k!+k,a_{k+1}=(k+1)!+k,cdots$ będą podzielne przez k, więc wszystko gra. Zostaje przypadek $k=1$.\ Zauważmy, że jeżeli weźmiemy $a_k=k!q$, $qin mathbb{Z}_+$, to nic się wyżej nie psuje. Chcemy tak dobrać q, że $a_k+1=k!+1$ nie jest pierwsze. Można to zrobić np. biorąc $a_k=(k!)^3$. Wtedy $a_k+1=(k!)^3+1^3=(k!+1)((k!)^2 - k! +1)$, co na pewno jest pierwsze, jeżeli tylko $(k!)^2 - k! +1>1$, co zachodzi dla $k>1$. item Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, AD,BE,CF jego wysokościami, a H punktem przecięcia tych wysokości. Udowodnij, że $angle EFH=angle DFH$ (z czego wynika, że H jest środkiem okręgu wpisanego w DEF).\ textbf{Rozwiązanie}: Zauważmy, że na czworokącie $AEHF$ da się opisać okrąg. Faktycznie $angle AEH=90^{circ}$ i $angle AFH=90^{circ}$, więc $angle AEH+angle AFH=180^{circ}$, co już gwarantuje, że okrąg da się opisać. Analogicznie okrąg da się opisać na $BFHD$.\ Z równości kątów wpisanych w okrąg i opartych na tym samym łuku mamy [angle EFH=angle EAH,angle DFH=angle DBH] Ponadto mamy $angle EAH=angle CAD=90^{circ}-angle ACB$ (bo $angle ADC=90^{circ}$). Analogicznie $angle DBH=90^{circ}-angle ACB$, co już dowodzi równości kątów $angle EFH$ i $angle DFH$. end{enumerate} end{document}