
Zadania PDF.

Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{To już koniec...} author{Ostatnia seria przygotowawcza} date{} maketitle begin{enumerate} item Niech $n,minmathbb{Z}_+$ będą takie, że $NWW(m,n)+NWD(m,n)=m+n$. Udowodnij, że jedna z tych liczb dzieli drugą. item Dane są 2 rozłączne zbiory $mathbb{A}$ i $mathbb{B}$, których sumą jest $mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne a,b większe od n, że ${a,b,a+b}$ jest zawarte w $mathbb{A}$ lub zawarte w $mathbb{B}$. (Wskazówka: Najpierw znajdź jakiekolwiek takie liczby :) item Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c zachodzi [1+frac{3}{ab+bc+ca}geq frac{6}{a+b+c}]. item (*?) Dany jest trójkąt ABC, w którym $angle ACB=90^{circ}$. Niech M będzie środkiem przeciwprostokątnej AB, H spodkiem (punktem przecięcia z AB) wysokości poprowadzonej z C, a P punktem wewnątrz trójkąta, takim, że $|AP|=|AC|$. Udowodnić, że PM jest dwusieczną (wewnętrzną) kąta $angle BPH$ wtedy i tylko wtedy, gdy $angle BAC=60^{circ}$. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{To już koniec...} author{Ostatnia seria przygotowawcza} date{} maketitle begin{enumerate} item Niech $n,minmathbb{Z}_+$ będą takie, że $NWW(m,n)+NWD(m,n)=m+n$. Udowodnij, że jedna z tych liczb dzieli drugą.\ textbf{Rozwiązanie}: Niech $ngeq m$ (wszystko jest symetryczne, więc można to założyć). Jest $NWW(m,n)=ncdot q$. Jeżeli $qgeq 2$, to $NWW(m,n)geq 2ngeq n+m$, więc $NWW(m,n)+NWD(m,n)>m+n$. Stąd $q=1$, co dowodzi, że $NWW(n,m)=n$, a więc $m|n$. item Dane są 2 rozłączne zbiory $mathbb{A}$ i $mathbb{B}$, których sumą jest $mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne a,b większe od n, że ${a,b,a+b}$ jest zawarte w $mathbb{A}$ lub zawarte w $mathbb{B}$. (Wskazówka: Najpierw znajdź jakiekolwiek takie liczby :)\ textbf{Rozwiązanie}: Znajdźmy najpierw jakiekolwiek liczby spełniające.\ Załóżmy, że $1inmathbb{A}$. Gdyby $2inmathbb{A}$, to ${1,1,2}subset mathbb{A}$, więc znaleźliśmy. Załóżmy $2inmathbb{B}$. Gdyby $4inmathbb{B}$, to ${2,2,4}subsetmathbb{B}$, więc też znaleźliśmy. Załóżmy $4inmathbb{A}$. $1,4inmathbb{A}$, stąd gdyby $5inmathbb{A}$, to ${1,4,5}subsetmathbb{A}$, stąd $5inmathbb{B}$.\ Gdyby $3inmathbb{A}$, to ${1,3,4}subsetmathbb{A}$.\ Gdyby $3inmathbb{B}$, to ${2,3,5}subsetmathbb{B}$.\ Z powyższego wynika, że zawsze znajdziemy taką trójkę liczb.\ Rozważmy zbiór liczb ${n+1,2(n+1),3(n+1),cdots}$. Całe poprzednie rozumowanie przenosi się na ten zbiór, więc znajdziemy w nim liczby a,b takie, że ${a,b,a+b}$ zawarte jest w którymś z $mathbb{A},mathbb{B}$. Oczywiście te liczby będą większe od n, bo wszystkie liczby z tego zbioru są większe od n. item Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c zachodzi [1+frac{3}{ab+bc+ca}geq frac{6}{a+b+c}] textbf{Rozwiązanie}: Mamy $sqrt{frac{a^2+b^2+c^2}{3}}geq frac{a+b+c}{3}$, stąd po przekształceniach dostajemy $a^2+b^2+c^2geq frac{1}{3}(a+b+c)^2$, a więc   [ab+bc+caleq frac{1}{3}(a+b+c)^2] Można to również udowodnić za pomocą ciągów jedno-monotonicznych.\ Stąd [1+frac{3}{ab+bc+ca}geq 1+ frac{9}{(a+b+c)^2}] Niech $x=frac{3}{a+b+c}$. Mamy do udowodnienia nierówność [1+ frac{9}{(a+b+c)^2}geq frac{6}{a+b+c}] czyli $1+x^2geq 2x$. Jest ona równoważna $(x-1)^2geq 0$. item (*?) Dany jest trójkąt ABC, w którym $angle ACB=90^{circ}$. Niech M będzie środkiem przeciwprostokątnej AB, H spodkiem (punktem przecięcia z AB) wysokości poprowadzonej z C, a P punktem wewnątrz trójkąta, takim, że $|AP|=|AC|$. Udowodnić, że PM jest dwusieczną (wewnętrzną) kąta $angle BPH$ wtedy i tylko wtedy, gdy $angle BAC=60^{circ}$. end{enumerate} end{document}