III porcja na OM

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 19:11 -

** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Przygotowanie do OMa 3.} date{} maketitle begin{enumerate} item Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC mają punkt wspólny. Udowodnić, że w $ABCD$ można wpisać okrąg. item Udowodnić, że jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, $m,ninmathbb{Z}_+$ i $frac{m}{n}=1+frac{1}{2}+frac{1}{3}+cdots+frac{1}{p-1}$, to $p|m$. Wskazówka na dole. item Trójkąt ABC jest ostrokątny. Na jego bokach, po zewnętrznej stronie dobudowano trójkąty równoboczne BCD, CAE, ABF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. item Rozstrzygnąć, czy istnieją 2 takie różne liczby 2^k, 2^l ($k,linmathbb{Z}_+$), że mają one tyle samo cyfr oraz jedna powstaje z drugiej przez permutowanie cyfr. item Powodzenia! end{enumerate} pagebreak textbf{Wskazówki}\ Wskazówka do 1.: Dirichlet.\ Wskazówka do 2.: Kiedy w czworokąt można wpisać okrąg?\ Wskazówka do 3.: Co jeszcze przechodzi przez ten punkt?\ Wskazówka do 4.: Co się nie zmienia przy permutowaniu? end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Przygotowanie do OMa 3.} date{} maketitle begin{enumerate} item Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC mają punkt wspólny. Udowodnić, że w $ABCD$ można wpisać okrąg.\ textbf{Rozwiązanie}:\ W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy [|AB|+|CD|=|AD|+|BC|] Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w ABC do AB,BC,CA jako E,F,X odpowiednio. Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w ADC do CD, AD, DC jako G,H,Y odpowiednio. Wtedy $|AB|=|AE|+|BF|$, $|BC|=|BF|+|CF|$, $|CD|=|CG|+|GD|$, $|AD|=|DH|+|HA|$.\ Ponadto z równości stycznych jest $|AE|=|AX|$, $|BE|=|BF|$, $|CF|=|CX|$, $|CG|=|CY|$, $|DG|=|DH|$, $|AH|=|AY|$. Mamy więc: [|AB|+|CD|=|AD|+|BC| Leftrightarrow |AX|+|CY|=|AY|+|CX| Leftrightarrow 2|AB|=2|AY|+2|CX|] Mamy $|AY|+|CX|=|AB|Leftrightarrow X=Y$, co kończy ten nudny dowód.   item Udowodnić, że jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, $m,ninmathbb{Z}_+$ i $frac{m}{n}=1+frac{1}{2}+frac{1}{3}+cdots+frac{1}{p-1}$, to $p|m$.\ textbf{Rozwiązanie}:\ Zauważmy, że wystarczy rozważać sytuację, gdy $frac{m}{n}$ jest zredukowany, czyli gdy $NWD(m,n)$ - wszystkie inne możliwe do otrzymania po lewej stronie ułamki można otrzymać przez przemnożenie licznika i mianownika przez liczbę, co nie zmienia tezy.\ Wymnóżmy obie strony równania przez $(p-1)!$. Po lewej stronie otrzymamy $mfrac{(p-1)!}{n}$, gdzie $n|(p-1)!$ (bo ułamek zredukowany), czyli $frac{(p-1)!}{n}inmathbb{Z}$. Po prawej stronie otrzymamy liczbę $frac{(p-1)!}{1}+frac{(p-1)!}{2}+cdots+frac{(p-1)!}{p-1}$. Zauważmy, że liczby $frac{(p-1)!}{k},frac{(p-1)!}{l}$ dają różne reszty z dzielenia przez p, gdy $0