** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Zadanka do OMa 2., trochę więcej niż ostatnio} date{} maketitle begin{enumerate} item Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC, M będzie środkiem ciężkości ABC, zaś H będzie ortocentrum (punktem przecięcia wysokości) ABC. Niech ponadto D,E,F będą środkami boków BC, CA, AB odpowiednio. begin{enumerate} item Udowodnij, że O pokrywa się z ortocentrum trójkąta DEF. item Wykaż, że M pokrywa się ze środkiem ciężkości DEF. item Udowodnij, że środek okręgu opisanego na DEF pokrywa się ze środkiem odcinka OH. Wskazówka: na przecięciu których prostych leży ten środek? item

Powyższe 3 podpunkty liczą się jako 3 zadania.   end{enumerate} item Wykazać, że jeżeli $ABCD$ jest prostokątem i P leży na okręgu opisanym na $ABCD$, to $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$. item Znaleźć wszystkie takie $ninmathbb{Z}_+$, że $5not|n$ i $n^4 + 4^n$ jest liczbą pierwszą. item Jest tylko 5 zadań, więc obniżam próg na chałwę: trzeba rozwiązać $3/5$, żeby ją dostać. Powodzenia. Mam nadzieję, że żadnego błędu nie ma, jak coś zauważycie, to od razu krzyczcie. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Zadanka do OMa 2., trochę więcej niż ostatnio} date{} maketitle begin{enumerate} item Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC, M będzie środkiem ciężkości ABC, zaś H będzie ortocentrum (punktem przecięcia wysokości) ABC. Niech ponadto D,E,F będą środkami boków BC, CA, AB odpowiednio.   begin{enumerate}   item Udowodnij, że O pokrywa się z ortocentrum trójkąta DEF.\   textbf{Rozwiązanie}: Zauważmy, że mamy $frac{AE}{AF}=frac{frac{1}{2}AB}{frac{1}{2}AC}=frac{AB}{AC}$, więc z tw. Talesa $EF||BC$ (i tak samo $DE||AB$ i $FD||AC$).\   Wiemy, że O leży na przecięciu symetralnych boków ABC. Weźmy symetralną boku AB. Przechodzi ona przez punkt F i jest prostopadła do AB, a więc jest też prostopadła do DE, jest więc wysokością w DEF spuszczoną z wierzchołka F.\   Analogicznie pozostałe symetralne są wysokościami O leży na przecięciu wysokości w DEF, więc O to ortocentrum DEF.   item Wykaż, że M pokrywa się ze środkiem ciężkości DEF.\   textbf{Rozwiązanie}: Oznaczmy jako G punkt przecięcia środkowej AD z EF. Wiemy, że $EF||BC$, stąd $GE||DC$ i $GF||DB$, więc z tw. Talesa [frac{GE}{DC}=frac{AE}{AC}=frac{1}{2}]   [frac{GF}{DB}=frac{AF}{AB}=frac{1}{2}]   Stąd oraz z faktu, że $DB=DC$ mamy $frac{GE}{GF}=frac{GE}{DC}frac{DB}{GF}=2cdotfrac{1}{2}=1$. G jest więc środkiem EF, więc środkowa GD pokrywa się ze środkową AD, stąd M pokrywa się z środkiem ciężkości DEF.   item Udowodnij, że środek okręgu opisanego na DEF pokrywa się ze środkiem odcinka OH. Wskazówka: na przecięciu których prostych leży ten środek?\   textbf{Pierwszy sposób}: Udowodnimy, że symetralne w trójkącie DEF przechodzą przez środek odcinka OH. A ściślej udowodnimy to, bez straty ogólności, dla symetralnej boku EF.\   Niech X oznacza rzut A na EF a Y oznacza rzut O na EF. Wiemy, że prosta prostopadła do EF i przechodząca przez środek odcinka XY przechodzi przez środek odcinka OH (z Talesa). Chcielibyśmy zatem, żeby środek odcinka

XY był środkiem EF i to już wystarcza, żeby udowodnić tezę.\   Środek odcinka XY jest środkiem EF wtedy i tylko wtedy, gdy $XF=YE$. Zauważmy, że $AX||DY$ (obie są prostopadłe do EF) i $DE||AF$. Stąd (i z tego, że punkty E,F leżą po przeciwnych stronach AD) mamy $angle XAF=angle EDY$. Ponadto $angle AXF=angle DYE=90$, więc $triangle AXFsim triangle DYE$ (cecha kkk) a ponadto $AF=DE=frac{1}{2}AB$, więc $triangle AXFequiv triangle DYE$ i $XF=YE$, co już dowodzi tezy.\   textbf{Drugi sposób}: Rozważmy jednokładność J o środku w M i skali $-frac{1}{2}$ (o jednokładności będzie na którymś z najbliższych kółek). Wiemy, że środkowe przecinają się w stosunku $2:1$, więc mamy np. $2DM=MA$ i D,A leżą po różnych stronach M, stąd $J(A)=D$. Analogiczne $J(B)=E$ i $J(C)=F$, więc $J(ABC)=J(DEF)$.\   Ortocentrum trójkąta w jednokładności przechodzi na ortocentrum (bo wysokości przechodzą na siebie), więc $J(H)=O$, stąd O,M,H - wpsółliniowe (leżą na tzw. prostej Eulera) i $MH=2MO$. Środki okręgów też przechodzą na siebie, więc O przechodzi na środek okręgu DEF. Ale z definicji jednokładności O przechodzi na punkt O^* leżący na prostej OM, po innej stronie M niż O i taki, że $MO=2MO^*$. Mamy $OO^*=2MO-MO^*=MH-MO^*=HO^*$, co dowodzi tezy.   item Powyższe 3 podpunkty liczą się jako 3 zadania.\   %textbf{Rozwiązanie}: Nie umiem :(end{enumerate} item Wykazać, że jeżeli $ABCD$ jest prostokątem i P leży na okręgu opisanym na $ABCD$, to $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.\ textbf{Rozwiązanie}: Zauważmy, że $angle APC=angle BPD=90$, więc, z Pitagorasa $PA^2+PC^2=AC^2=BD^2=PB^2+PD^2$. Założenie, że P należy do okręgu opisanego upraszcza sprawę, ale jest zbędne - teza zachodzi dla każdego P na płaszczyźnie. item Znaleźć wszystkie takie $ninmathbb{Z}_+$, że $5not|n$ i $n^4 + 4^n$ jest liczbą pierwszą.\ textbf{Rozwiązanie}: Jeżeli $2|n$, to $2|n^4+4^n$ i $n^4+4^n>2$, więc na pewno nie jest to liczba pierwsza. Niech $n=2k+1$ ($kinmathbb{Z}_+cup{0}$). Dla $5not|n$ mamy $n^4equiv 1 (mod 5)$ (można policzyć 4 reszty albo z tw. Fermata) oraz $4^n=16^kcdot 4equiv 1^kcdot4= 4 (mod 5)$, więc $5|n^4+4^n$, a dla $n>1$ mamy $4^n+n^4>5$, więc dla $n>1$ nie otrzymamy liczby pierwszej. Dla $n=1$ faktycznie otrzymujemy liczbę pierwszą 5. item Jest tylko 5 zadań, więc obniżam próg na chałwę: trzeba rozwiązać $3/5$, żeby ją dostać. Powodzenia. Mam nadzieję, że żadnego błędu nie ma, jak coś zauważycie, to od razu krzyczcie. end{enumerate} end{document}