I porcja na OM

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 19:06 -

** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Zadania do samodzielnego rozwiązania spod hasła "Kombinować każdy może..."} date{} maketitle begin{enumerate} item Kombinatoryki jeszcze w tym roku nie było, najwyżej tyle co na obozie, ale do tych zadań nie potrzebna jest teoria (może oprócz najprostszej - Dirichleta, który był i prostych kolorowań, które były na obozie), bardziej tytułowa umiejętność kombinowania. item Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, takie, że $2p+1$ i $4p+1$ są również pierwsze. item Mamy prostokątną szachownicę $Ntimes M$, z wyciętym polem (a,b) (lewy dolny róg ma współrzędne $(1,1)$, a lewy górny $(1,M)$). Udowodnić, że jeśli szachownicę tę (bez pola (a,b)) da się pokryć prostokątami $1times 2$, stawianymi poziomo lub pionowo, to $2|a+b$. item Dane są liczby $a_1 b_n$, wśród których każda z liczb $1,2,3,cdots,2n$ występuje dokładnie raz. Udowodnić, że $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + cdots + |a_n - b_n|=n^2$. Wskazówka: przeanalizować dużo małych przypadków. item Te zadanka nie są zbyt proste, ani trudne, biorąc pod uwagę, że na rozwiązanie jest tydzień. W miarę możliwości poziom następnych serii (o ile będą), będzie wyrównywany do poziomu rozwiązujących. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Zadania do samodzielnego rozwiązania spod hasła "Kombinować każdy może..."} date{} maketitle begin{enumerate} item Kombinatoryki jeszcze w tym roku nie było, najwyżej tyle co na obozie, ale do tych zadań nie potrzebna jest teoria (może oprócz najprostszej - Dirichleta, który był i prostych kolorowań, które były na obozie), bardziej tytułowa umiejętność kombinowania. item Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, takie, że $2p+1$ i $4p+1$ są również pierwsze.\ textbf{Rozwiązanie}: Rozważmy reszty z dzielenia przez 3. Jeżeli $pequiv 0 (mod 3)$, to oczywiście $p=3$. Wtedy też $2p+1=7$ i $4p+1=13$ są pierwsze, więc mamy jedno rozwiązanie. Gdy $pequiv 1 (mod 3)$, to $3|2p+1$, więc, skoro jest to liczba pierwsza, to musi być $2p+1=3$, $p=1$ - sprzeczność. Jeżeli $pequiv 2 (mod 3)$, to $3|4p+1$, więc $4p+1=3$, czyli $p3,4p+1>3$, więc $p=3$. Liczba 3 spełnia warunki zadania.\ item Mamy prostokątną szachownicę $Ntimes M$, z wyciętym polem (a,b) (lewy dolny róg ma współrzędne $(1,1)$, a lewy górny $(1,M)$). Udowodnić, że jeśli szachownicę tę (bez pola (a,b)) da się pokryć prostokątami $1times 2$, stawianymi poziomo lub pionowo, to $2|a+b$.\ textbf{Rozwiązanie}: Zauważmy, że jeżeli szachownicę sa się pokryć prostokątami, to musi być $2|NM-1$, stąd N,M - nieparzyste, $N=2n+1$, $M=2m+1$ ($n,minmathbb{Z}$, $n,mgeq 0$). Pokolorujmy pola (x,y) szachownicy, które spełniają warunek $2|x+y$ na czarno. Każdy prostokąt zajmuje jedno pole białe i jedno czarne, skoro da się pokryć prostokątami, to pól białych i czarnych jest tyle samo.\ Zauważmy, że wszystkie rogi są czarne. Pól czarnych jest $ncdot M+m+1$ (liczymy po 2 kolumny i ostatnia zostaje), a białych $ncdot M+m$, czyli o jedno mniej. Stąd pole czarne musiało być na początku usunięte, aby pokrycie było możliwe.\ Co ciekawe, odwrotne twierdzenie jest również prawdziwe: Da się pokazać (konstruując śmieszną spiralkę), że jeżeli tablica $Ntimes M$, gdzie N,M - nieparzyste ma wycięte pole (a,b), takie, że $2|a+b$, to da się ją pokryć prostokątami $1times 2$ (stawianymi pionowo lub poziomo).\ item Dane są liczby $a_1 b_n$, wśród których każda z liczb $1,2,3,cdots,2n$ występuje dokładnie raz. Udowodnić, że $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + cdots + |a_n - b_n|=n^2$. Wskazówka: przeanalizować dużo małych przypadków.\ textbf{Rozwiązanie}: Zauważmy, że każda liczba większa niż n jest w parze w wyrażeniu z zadania z liczbą niewiększą niż n. Faktycznie załóżmy, że w (b_n) jest k liczb większych od n, te liczby to oczywiście $b_1,b_2,cdots,b_k$, bo (b_n) jest posortowany. Wtedy oczywiście w (a_n) jest $n-k$ liczb większych od n i są to liczby $a_n,a_{n-1},cdots,a_{k+1}$. Widać, że w żadnej parze nie ma 2 liczb większych od n.\ Z powyższego rozumowania wnosimy, że w każdej parze jest 1 liczba większa od n i jedna niewiększa od n. Ponieważ każda liczba większa od n jest większa od każdej liczby niewiększej od n, to w $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + cdots + |a_n - b_n|$ liczby większe od n są brane z plusem, a niewiększe z minusem (bo jeżeli $a>b$, to $|a-b|=a-b$), więc $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + cdots + |a_n - b_n|=2n+(2n-1)+cdots+(n+1)-n-(n-1)-cdots-1=(2n-n)+((2n-1) - (n-1))+cdots+((n+1)-1)=n+n+cdots+n=ncdot n=n^2$. item Te zadanka nie są zbyt proste, ani trudne, biorąc pod uwagę, że na rozwiązanie jest tydzień. W miarę możliwości poziom następnych serii (o ile będą), będzie wyrównywany do poziomu rozwiązujących. end{enumerate} end{document}