Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 17:11 -

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[OT4]{fontenc} usepackage[utf8]{inputenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin {document} title{Kółko 20.10 - kombinatoryka - zliczanie na chama} date{} maketitle Zadanka, bez teorii :) $mathbb{Z}$ oznacza liczby całkowite, a nie zespolone. begin{enumerate} item Udowodnij, że: begin{enumerate} item oblicz sumę wszystkich elementów wszystkich podzbiorów zbioru ${1,2,cdots,n}$. item Udowodnij, że jeżeli $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$ jest rokładem na czynniki pierwsze n (czyli $p_kneq p_j$ dla $kneq j$, p_k-pierwsza, a_k - całkowite nieujemne), to suma dzielników n wynosi $frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_k-1}...frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$. Przy okazji: kto pamięta, że $1+p+p^2+cdots+p^n=frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ dla $pneq 1$? :P end{enumerate} item Yogi zawsze pałuje nierówności, przy czym oczywiście popełnia mnóstwo błędów. Próbował on właśnie policzyć $(a_1+a_2+cdots+a_k)^n$ ($k,ninmathbb{Z}_+$). Powiedz mu, ile różnych jednomianów powinien otrzymać. Brzmi to niejasno, więc przykład: $(a_1+a_2)^2=a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$, więc misio powinien otrzymać 3 jednomiany: a_1^2,a_1a_2,a_2^2. (źródło - Staszic) item Oblicz, na ile sposobów można wybrać takie $x_1,x_2,cdots,x_k$ całkowite nieujemne, że $x_1+x_2+cdots+x_kleq n$ ($ninmathbb{Z}_+$). item Zbiór M jest podzbiorem zbioru ${1,2,3,cdots,3n}$, gdzie n - całkowite, takim, że jeśli $x,yin M$, to $x-yneq n$ i $x+yneq n$.

Ile maksymalnie elementów może mieć zbiór M? (źródło - delta)   item Niech $(a_1,a_2,cdots,a_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych, a b_i oznacza liczbę elementów ciągu $(a_1,a_2,cdots,a_n)$, niemniejszych od i. Wykaż, że $sum_{k=1}^na_i=sum_{k=1}^{infty}b_i$, biorąc pod uwagę, że OI własnie się zaczęła. (źródło - Staszic)   item Niech p,q będą liczbami całkowitymi dodatnimi, względnie pierwszymi. Wykaż, że $[frac{p}{q}]+[frac{2p}{q}]+cdots+[frac{(q-1)p}{q}] = [frac{q}{p}]+[frac{2q}{p}]+cdots+[frac{(p-1)q}{p}]$ (źródło - OM Słowenii)   item Oblicz, na ile sposobów da się pokryć prostokąt $2times n$ ($ninmathbb{Z}_+$) prostokątami $2times 1$ i $1times 2$.   item Dany jest ciąg $nm+1$ różnych liczb. Wykazać, że podciąg ten zawiera podciąg $n+1$-elementowy rosnący, lub podciąg $m+1$-elementowy malejący. (źródło - Zwardoń)   item (*) Oblicz maksymalną liczbę: begin{enumerate}   item obszarów, na które dzieli płaszczyznę n prostych,   item obszarów, na które dzieli przestrzeń n płaszczyzn.   end{enumerate}   Obszary nieskończone również powinny być policzone. (źródło - nieocenione zadania dra Kuczmy dla pierwszego roku JSIM)   end{enumerate} end{document}