** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} defrozw{\ textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} title{26.03 - The best of OMG} date{} maketitle paragraph{Zadania z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów} begin{enumerate} item W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym co najwyżej 1 mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których jest to możliwe. item Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od S. Wykaż, że $|AB|

> 2|CD|$. item Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do AE. Na prostej k obieramy takie punkty K,L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola. item Każda z liczb $x_1,x_2,cdots, x_{101}$ jest równa $pm 1$. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $$x_1x_2+x_2x_3+cdots+x_{100}x_{101}+x_{101}x_1$$ item Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta l przechodząca przez jego środek. Niech a,b,c,d oznaczają odległości punktów A,B,C,D od prostej l. Wykazać, że $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. item Wyznacz wszystkie takie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich, że liczba $a+b$ jest pierwsza oraz liczba a^3+b^3 jest podzielna przez 3. item Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1,2,cdots,20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? item Liczby a,b,c są dodatnie. Wykaż, że $$frac{a}{a+1}+frac{b}{(a+1)(b+1)}+frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} 2|CD|$. item Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do AE. Na prostej k obieramy takie punkty K,L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola. item Każda z liczb $x_1,x_2,cdots, x_{101}$ jest równa $pm 1$. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $$x_1x_2+x_2x_3+cdots+x_{100}x_{101}+x_{101}x_1$$ item Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta l przechodząca przez jego środek. Niech a,b,c,d oznaczają odległości punktów A,B,C,D od prostej l. Wykazać, że $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. rozw Możemy tak zmienić naweznictwo wierzchołków, że l będzie przecinała bok AB kwadratu $ABCD$ (być może w A lub w B) i wierzchołki A,B,C,D będą posortowane przeciwnie do wskazówek zegara względem środka kwadratu. Nie zmieni to niczego w tezie.\ Jeżeli prosta l przechodzi przez wierzchołek kwadratu, to jej odległości od 2 wierzchołków będą wynosić $frac{sqrt{2}}{2}$, a od pozostałych dwóch 0, więc teza zachodzi. Dalej zakładamy, że l nie przechodzi przez żaden wierzchołek.\ Niech A' oznacza rzut A na l, a B' rzut B na l oraz niech O oznacza środek kwadratu $ABCD$, a E środek boku AB. Skoro prosta l nie przechodzi przez A ani przez B, to $A'neq A$ i $B'neq B$, więc proste AA',BB' są określone poprawnie.\ Rozważmy obrót O_E^{-90deg} o $-90deg$ wokół E. Przenosi on A na O, a O na B, przenosi on więc prostą AA' na prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez obraz punktu A: $O_E^{-90deg}(A)=O$, a więc przenosi on AA' na l.\ Analogicznie stwierdzamy, że obrót ten przenosi l na prostą prostopadłą do l i przechodzącą przez $O_E^{-90deg}(O)$, a więc przenosi on l na BB'. Stąd wnosimy, że przenosi on punkt przecięcia AA' z l na punkt przecięcia l z BB', a więc przenosi on A' na B': $O_E^{-90deg}(A')=B'$!\ Tym samym jest $O_E^{-90deg}(A)=O$ i $O_E^{-90deg}(A')=B'$, a więc $O_E^{-90deg}(AA')=OB'$, więc $|AA'|=|OB'|$ i obliczamy $$|AA'|^2 + |BB'|^2 = |OB'|^2 + |BB'|^2 = |OB|^2 = (frac{sqrt{2}}{2})^2=frac{1}{2}$$ Analogicznie $|CC'|^2+|DD'|^2 = frac{1}{2}$, co daje tezę. item Wyznacz wszystkie takie pary (a,b) liczb całkowitych dodatnich, że liczba $a+b$ jest pierwsza oraz liczba a^3+b^3 jest podzielna przez 3. rozw textbf{Sposób 1.} Małe twierdzenie Fermata orzeka, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $$a^pequiv a mod p$$ dla wszystkich a całkowitych.\ Stosując je do $p=3$ otrzymujemy $a^3equiv a mod 3$, a więc $a^3 + b^3 equiv a+b mod 3$. Z treści zadania $3|a^3+b^3$, a więc $3|a+b$. Ale $a+b$ miało być pierwsze, więc $a+b=3$, czyli $(a,b)=(1,2)$ lub $(a,b)=(2,1)$. Obie te pary spełniają warunki zadania.\ rozw textbf{Sposób 2.} Zamiast udowadniać tożsamość $a^3equiv a mod 3$

korzystając z małego twierdzenia Fermata, udowodnijmy ją wprost rozpatrując wszystkie reszty z dzielenia przez 3: $$0^3 = 0, 1^3 = 1, 2^3 = 8 equiv 2 mod 3$$ Dalsze rozumowanie jak w sposobie textbf{1}.\ rozw textbf{Sposób 3. (Marty)} Skorzystajmy ze wzoru skróconego mnożenia: $$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$ Jeżeli $3| a+b $ to rozumujemy jak w sposobie textbf{1}, jeżeli nie, to z $3 | a^3 + b^3$ wynika $3| a^2 - ab + b^2$. Sprawdzamy 9 kombinacji reszt z dzielenia przez 3 i dochodzimy w każdym wypadku do wniosku, że jeżeli $3not|a + b$, to $3 not | a^2 - ab + b^2$. item Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1,2,cdots,20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? item Liczby a,b,c są dodatnie. Wykaż, że $$frac{a}{a+1}+frac{b}{(a+1)(b+1)}+frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}0$, przyjmuje wartości z przedziału $(0,1)$. Możemy więc oszacować $frac{c}{c+1} 1000$. Stąd wynika, że pewne 2 różne podzbiory mają równe sumy. item ** Niech M będzie 10 elementowym podzbiorem zbioru ${0,1,2,cdots,99}$. Dowieść, że zbiór M zawiera 2 rozłączne niepuste podzbiory o takiej samej sumie elementów. %rozw %Poprzednie rozumowanie załamuje się w tym przypadku, bowiem jednym z elementów jest 0. Odrzućmy 0. Wybieramy więc 9-elementowy (w najgorszym przypadku) zbiór z ${1,2,cdots,99}$.\ %Konwencjonalnym Dirichletem nie da się tego zrobić, bo $2^9 < 99+98+cdots+91$.\ %Niech $M={a_1,a_2,cdots,a_9}$ i $a_1