** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[OT4]{fontenc} usepackage[utf8]{inputenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin {document} title{Kółko 13.10 - wielomiany, bardziej całkowite} date{} maketitle paragraph{Teoria.} begin{enumerate} item begin{defn} Stopniem wielomianu $W(x)=a_0+a_1cdot x+...+a_ncdot x^n$ (gdzie a_nneq0) nazywamy n i oznaczamy to $deg W(x)=n$. Przyjmujemy, że stopień wielomianu $W(x)=0$ wynosi $-infty$.end{defn} item begin{thm} Niech $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ będą parami różne oraz niech $y_1,...,y_{n+1}$ będą rzeczywiste. Wtedy wśród wielomianów stopnia n lub mniejszego istenieje dokładnie jeden wielomian $W(x)$ spełniający $W(x_i)=y_i$ dla $i=1,2,...,n+1$.end{thm} item begin{thm} Jeżeli $W(x)$ ma współczynniki całkowite i a,b są całkowite ($aneq b$), to $a-b|W(a)-W(b)$. end{thm}   item begin{thm}[Bezout] Dla każdego x_0 i każdego wielomianu $W(x)$ zachodzi $W(x)=(x-x_0)P(x)+W(x_0)$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem, który jest textbf{różny dla różnych x_0}. Ponadto jeżeli $W(x)$ miało współczynniki całkowite i x_0 jest całkowite, to $P(x)$ ma współczynniki całkowite.end{thm} item begin{useless} Wzory Viete chwilowo nie będą nam potrzebne, więc ich nie podaję :)end{useless}   end{enumerate}   paragraph{Zadania.}   begin{enumerate}   item Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia $9|W(223)$ i $223|W(9)$. Jaka jest reszta z dzielenia $W(232)$ przez 2007? (źródło - Staszic)   item Wykaż, że dla dowolnego wielomianu $W(x)$ mającego pierwiastek x_0 można znaleźć takie c, że dla każdego k jest $2^k|W(2^k-c)$.   item Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami złożonymi (czyli liczbami całkowitymi dodatnimi, nie będącymi pierwszymi i nie będącymi jedynką)? (źródło - Staszic)   item Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami pierwszymi? (źródło - Staszic)   item Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeżeli dla co najmniej 6 różnych liczb całkowitych przyjmuje on wartość 2007, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych. (źródło - Staszic)   item Wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych dla dowolnej liczby $k=0,1,...,n$ spełnia równość $P(k)=frac{k}{k+1}$. Obliczyć $P(n+1)$. (źródło - Zwardoń)   item Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami n-tego stopnia i niech $x_1,...,x_{n+1}$ będą parami różne. Dowieść, że jeśli $P(x_i)=Q(x_i)$ dla $i=1,2,...,n+1$, to $P(x)equiv Q(x)$ (są one identyczne). (źródło - dowód 2.)   item (*) Niech F,G,H będą wielomianami stopnia co najwyżej $2n+1$ o współczynnikach rzeczywistych, takimi, że   begin{enumerate}   item dla wszystkich $xinmathbb{R}$ jest $F(x)leq G(x)leq H(x)$,   item istnieją takie parami różne $x_1,...,x_n$, że $F(x_i)=H(x_i)$ dla $i=1,2,...,n$,   item istnieje takie x_0 różne od $x_1,...,x_n$, że $F(x_0)+H(x_0)=2G(x_0)$.   end{enumerate}   Udowodnić, że $2G(x)equiv F(x)+H(x)$. (źródło - BW)   end{enumerate}   end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article}   usepackage{amssymb}   textwidth 16cm   textheight 24cm   oddsidemargin 0cm   topmargin 0pt   headheight 0pt   headsep 0pt   usepackage[polish]{babel}   usepackage[utf8]{inputenc}   usepackage[T1]{fontenc}   %usepackage{MnSymbol}   % --   vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small   hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small   % THEOREMS ---   newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]   newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}   newtheorem{lem}[thm]{Lemat}   newtheorem{defn}[thm]{Definicja}   newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}   newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}   newtheorem{useless}[thm]{}   defrozw{\ textbf{Rozwiązanie}: \}   begin {document}   title{Kółko 13.10 - wielomiany, bardziej całkowite}   date{}   maketitle   paragraph{Teoria.}   begin{enumerate}   item begin{defn} Stopniem wielomianu $W(x)=a_0+a_1cdot x+...+a_ncdot x^n$ (gdzie a_nneq0) nazywamy n i oznaczamy to $deg W(x)=n$. Przyjmujemy, że stopień wielomianu $W(x)=0$ wynosi $-infty$.end{defn}   item begin{thm} Niech $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ będą parami różne oraz niech $y_1,...,y_{n+1}$ będą rzeczywiste. Wtedy wśród wielomianów stopnia n lub mniejszego istnieje dokładnie jeden wielomian $W(x)$ spełniający $W(x_i)=y_i$ dla $i=1,2,...,n+1$.end{thm}   textbf{Dowód}: \   Na początek zauważmy, że wielomian $$W(x) := y_1 frac{(x - x_2)(x - x_3)dots (x - x_{n+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) dots (x_1 - x_{n+1})} +   y_2 frac{(x - x_1)(x - x_3)dots (x - x_{n+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) dots (x_2 - x_{n+1})} + dots $$ $$+ y_{n+1} frac{(x - x_1)(x - x_2)dots (x - x_n)}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) dots (x_{n+1} - x_n)}$$ spełnia warunki twierdzenia (nazywany jest on emph{wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a}).\   Załóżmy teraz, że istnieją 2 wielomiany $W(x),V(x)$ spełniające warunki zadania. Niech $$P(x) := W(x) - V(x)$$ Chcemy udowodnić, że $P(x)equiv 0$. Zachodzi $$P(x_i) = 0 hbox{ dla } i=1,2,dots,n+1$$ więc, z tw. Bezout, mamy $$P(x) = Q(x)(x - x_1)(x - x_2) dots (x - x_{n+1})$$ ale wielomian $P(x)$ ma stopień co najwyżej n, a wielomian $(x - x_1)(x - x_2) dots (x - x_{n+1})$ ma stopień $n+1$, więc $Q(x)equiv 0$, a stąd wynika $P(x)equiv 0$, co kończy dowód.   item begin{thm} Jeżeli $W(x)$ ma współczynniki całkowite i a,b są całkowite ($aneq b$), to $a-b|W(a)-W(b)$. end{thm}   item begin{thm}[Bezout] Dla każdego x_0 i każdego wielomianu $W(x)$ zachodzi $W(x)=(x-x_0)P(x)+W(x_0)$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem, który jest textbf{różny dla różnych x_0}. Ponadto jeżeli $W(x)$ miało współczynniki całkowite i x_0 jest całkowite, to $P(x)$ ma współczynniki całkowite.end{thm} item begin{useless} Wzory Viete chwilowo nie będą nam potrzebne, więc ich nie podaję :)end{useless}   end{enumerate}   paragraph{Zadania.}   begin{enumerate}   item Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia $9|W(223)$ i $223|W(9)$. Jaka jest reszta z dzielenia $W(232)$ przez 2007? (źródło - Staszic)   rozw   Jest (patrz teoria) $$232 - 223 | W(232) - W(223) hbox{ oraz } 9 | W(223) hbox{ stąd } 9 | W(232) - W(223) + W(223) = W(232)$$ $$232 - 9 | W(232) - W(9) hbox{ oraz } 9223| W(9) hbox{ stąd } 223 | W(232) - W(9) + W(9) = W(232)$$ Skoro $232,9$ są względnie pierwsze i $2007 = 223 cdot 9$, to stąd już wynika, że $2007 | W(232)$, a więc $W(232)$ daje resztę 0.   item Wykaż, że dla dowolnego wielomianu $W(x)$ mającego pierwiastek x_0 można znaleźć takie c, że dla każdego k jest $2^k|W(2^k-c)$.   rozw   Mamy dla dowolnej liczby naturalnej n: $$n | W(n + x_0) - W(x_0) = W(n + x_0)$$ W szczególności jeżeli weźmiemy $c:= - x_0$, to $n|W(n - c)$, a stąd w jeszcze większej szczególności $2^k | W(2^k - c)$.   item Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami złożonymi (czyli liczbami całkowitymi dodatnimi, nie będącymi pierwszymi i nie będącymi jedynką)? (źródło - Staszic)   rozw   Tak, przykładem takiego wielomianu jest wielomian $4(x^2 + 1)$.   item Czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych stopnia większego niż 1 mający wszystkie wartości (dla argumentów całkowitych) będące liczbami pierwszymi? (źródło - Staszic)   rozw   Udowodnimy, że taki wielomian nie istnieje.\   Załóżmy, że wielomian $W(x)$ spełnia własność z treści zadania. Niech $p = W(0)$. $$hbox{Mamy } kp | W(kp) - W(0) hbox{ dla wszystkich } kinmathbb{Z}$$ $$hbox{więc } p | W(kp) hbox{ dla wszystkich } kinmathbb{Z}$$ Ale $W(kp)$ jest liczbą pierwszą, więc jeżeli jest ona podzielna przez $p > 1$, to jest równa p: $$W(kp) = p hbox{ dla wszystkich } kinmathbb{Z}$$ Wielomian $W(x)$ przyjmuje w nieskończenie wielu punktach taką wartość jak $V(x) = p$, więc wielomiany te są równe.\ Bardziej formalnie: załóżmy, że $n = deg W$. Wielomian $W(x)$ jest jedynym wielomianem stopnia $leq n$, który przyjmuje wartość p w punktach $0,p,2p,dots,np$. Ale $V(x) = p$ też jest takim wielomianem, więc $W(x) = V(x) = p$.\ Wielomian W jest więc stały, co przeczy założeniom zadania.\ Odpowiedź: Taki wielomian nie istnieje. item Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeżeli dla co najmniej 6 różnych liczb całkowitych przyjmuje on wartość 2007, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych. (źródło - Staszic) rozw Rozważmy wielomian $$Q(x) = P(x) - 2007$$ Wielomian $Q(x)$ ma, zgodnie z założeniami zadania, przynajmniej 6 różnych pierwiastków $x_1,x_2,dots,x_6$, chcemy zaś udowodnić, że nie przyjmuje on wartości 2007.\ Zgodnie z tw Bezout, jest $$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)R(x)$$ gdzie $R(x)$ ma współczynniki całkowite.\ Rozkład na czynniki pierwsze 2007 to $3^2 cdot 223$. Załóżmy, że dla pewnego X jest $Q(X) = 2007$. Wtedy $$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)(X - x_5)(X - x_6) | 2007$$ Co najwyżej 1 z tych czynników może się dzielić przez 223 i co najwyżej 2 mogą się dzielić przez 3. Aż 3 czynniki muszą więc być równe $pm 1$, co jest niemożliwe, gdyż czynniki są parami różne. Sprzeczność. item Wielomian $P(x)$, stopnia co najwyżej $n>2$, o współczynnikach rzeczywistych dla dowolnej liczby $k=0,1,...,n$ spełnia równość $P(k)=frac{k}{k+1}$. Obliczyć $P(n+1)$. (źródło - Zwardoń) rozw Niech $Q(x) = P(x)cdot(x+1) - x$. Z założeń zadania wynika, że $deg Qleq n+1$ oraz, że $$Q(k) = 0 hbox{ dla } k = 0,1,2,dots,n$$ Jest więc, z tw Bezout $$Q(x)=x(x-1)(x-2)dots(x-n)R(x)$$ ponieważ $n+1 = deg x(x-1)(x-2)dots(x-n) geq deg Q$, to $R(x)$ jest wielomianem stałym. Ponadto $Q(-1) = P(-1)cdot 0 - (-1) = 1$, a stąd obliczam $$R(x) = frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$ $$Q(x)=frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x(x-1)(x-2)dots(x-n)$$ Pozostaje policzyć $$Q(n+1) = (-1)^{n+1}$$ $$P(n+1)cdot(n+1) - n = (-1)^{n+1}$$ $$P(n+1) = frac{n+(-1)^{n+1}}{n+1}$$ item Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami n-tego stopnia i niech $x_1,...,x_{n+1}$ będą parami różne. Dowieść, że jeśli $P(x_i)=Q(x_i)$ dla $i=1,2,...,n+1$, to $P(x)equiv Q(x)$ (są one identyczne). (źródło - dowód 2.) rozw Dowód powyżej (w teorii). item (*) Niech F,G,H będą wielomianami stopnia co najwyżej $2n+1$ o współczynnikach rzeczywistych, takimi, że begin{enumerate} item dla wszystkich $xinmathbb{R}$ jest $F(x)leq G(x)leq H(x)$, item istnieją takie parami różne $x_1,...,x_n$, że $F(x_i)=H(x_i)$ dla $i=1,2,...,n$, item istnieje takie x_0 różne od $x_1,...,x_n$, że $F(x_0)+H(x_0)=2G(x_0)$. end{enumerate} Udowodnić, że $2G(x)equiv F(x)+H(x)$. (źródło - BW) rozw begin{defn}Jeżeli $W(x)$ jest podzielne przez $(x-a)^k$, ale nie jest podzielne przez $(x-a)^{k+1}$, to mówimy, że a jest k-krotnym pierwiastkiem $W(x)$.end{defn} begin{lem}Jeżeli $W(x)$ jest stale nieujemny, to wszystkie jego pierwiastki są parzystej krotności.end{lem} textbf{Dowód lematu}: Korzysta z pojęcia ciągłości funkcji wielomianowej. rozw Rozważmy wielomiany $$W(x) := H(x) - G(x), V(x) := G(x) - F(x)$$ Są one stale dodatnie, ponadto w punktach $x_1,x_2,dots,x_n$ przyjmują wartość 0, więc z tw. Bezout i z lematu wynika: $$W(x) = (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 dots (x - x_n)^2 R(x)$$ wielomian $R(x)$ jest stopnia co najwyżej $(2n + 1) - 2cdot n = 1$. Ale gdyby R było stopnia 1, to $W(x)$ miałby pierwiastek nieparzystej krotności, co jest niemożliwe. A więc $R(x)$ jest stałą i $W(x)$ ma postać $$W(x) = alpha (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 dots (x - x_n)^2$$ Analogicznie $$V(x) = beta (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 dots (x - x_n)^2$$ ponadto $W(x_0) = V(x_0) neq 0$, a więc $alpha = beta$ i $W(x) equiv V(x)$, czyli $$H(x) - G(x) equiv G(x) - F(x)hbox{ a więc } 2G(x) equiv F(x) + H(x)$$ end{enumerate} end{document}