** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[OT4]{fontenc} usepackage[utf8]{inputenc} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin {document} title{Kółko 1.12 - teoria liczb} date{} maketitle paragraph{textbf{Teoria} - czyli kilka (nie)użytecznych rad} begin{enumerate} item Teoria liczb dotyczy textbf{całkowitych}. Wymiernych zwykle należy unikać. item W co pierwszym zadanku z teorii liczb trzeba użyć modulo (reszt z dzielenia). Jak się nie wie reszt z dzielenia przez co użyć, to najlepiej spróbować po kolei $2,3,4...$. item Jak się już trochę rozwali zadanie z modulo, to można szacować (użyteczny do tego jest zwykle fakt: jeżeli $a,b>0$ i a dzieli b, to $a leq b$). item Jak się ma rozwiązać równanie w całkowitych dodatnich (czyli znaleźć wszystkie rozwiązania), to w $60%$ przypadków wszystkie rozwiązania są poniżej 10, czyli można znaleźć ręcznie wszystkie rozwiązania. item Zwykle niefajnie jest wykazywać, że coś jest równe 1, jeszcze niefajniej, że coś jest równe 2, a najfajniej jest wykazywać, że coś jest równe 0 - 0 jest jedyną liczbą podzielną przez dowolną liczbę, jedyną liczbą, która jest podzielna przez 2^n dla dowolnego n i tym podobne bajery. item Jak się ma pierwiastki i tym podobne świństwa, to najlepiej upraszczać, żeby ładnie wyglądało. item Najlepiej jest jednak nie zawsze słuchać rad, ale textbf{myśleć} co się robi i co z tego może wyniknąć. Myślenie jest zwykle programem niestandardowym u informatyków, więc należy sobie doinstalować. Rozwiązanie wielu zadanek z danej dziedziny wybitnie zwiększa prędkość i jakość myślenia. end{enumerate} paragraph{textbf{Teoria} - czyli parę twierdzeń} begin{enumerate} item Twierdzenie Fermata: jeżeli p jest pierwsze, to $p|a^p - a$ dla dowolnego a całkowitego. item Eee, chyba na razie więcej nie potrzeba :) end{enumerate} paragraph{textbf{Zadania łatwe}} begin{enumerate} item Dla jakich n liczba $1!+2!+cdots+n!$ jest równa x^2 dla x całkowitego. item Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^3 - y^3 = 91$. item Dane są liczby naturalne n, k większe od 1, takie, że liczba $p=2k-1$ jest pierwsza. Rozstrzygnąć, czy jeżeli $p|binom{n}{2}-binom{k}{2}$, to $p^2|binom{n}{2}-binom{k}{2}$. item 6 liczb pierwszych jest sześcioma kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Udowodnić, że różnica tego ciągu jest nie mniejsza od 30. end{enumerate} paragraph{textbf{Zadania trudniejsze} z kółka mat. V LO w Krakowie} begin{enumerate} item Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie $y^2=x^3+16$. item Udowodnić, że równanie $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich. item Rozwiązać równanie $(x+y)(1+xy)=2^b$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, b. item (Lepiej nie ruszać, nie wiem na ile trudne) Niech p - pierwsza, taka, że $2p+1$ również pierwsza. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^p + 2 y^p + 5 z^p = 0$. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Kółko 1.12 - teoria liczb} date{} maketitle paragraph{textbf{Teoria} - czyli kilka (nie)użytecznych rad} begin{enumerate} item Teoria liczb dotyczy textbf{całkowitych}. Wymiernych zwykle należy unikać. item W co pierwszym zadanku z teorii liczb trzeba użyć modulo (reszt z dzielenia). Jak się nie wie reszt z dzielenia przez co użyć, to najlepiej spróbować po kolei $2,3,4...$. item Jak się już trochę rozwali zadanie z modulo, to można szacować (użyteczny do tego jest zwykle fakt: jeżeli

$a,b>0$ i a dzieli b, to $a leq b$). item Jak się ma rozwiązać równanie w całkowitych dodatnich (czyli znaleźć wszystkie rozwiązania), to w $60%$ przypadków wszystkie rozwiązania są poniżej 10, czyli można znaleźć ręcznie wszystkie rozwiązania. item Zwykle niefajnie jest wykazywać, że coś jest równe 1, jeszcze niefajniej, że coś jest równe 2, a najfajniej jest wykazywać, że coć jest równe 0 - 0 jest jedyną liczbą podzielną przez dowolną liczbą, jedyną liczbą, która jest podzielna przez 2^n dla dowolnego n i tym podobne bajery. item Jak się ma pierwiastki i tym podobne świństwa, to najlepiej upraszczać, żeby ładnie wyglądało. item Najlepiej jest jednak nie zawsze słuchać rad, ale textbf{myśleć} co się robi i co z tego może wyniknąć. Myślenie jest zwykle programem niestandardowym u informatyków, więc należy sobie doinstalować. Rozwiązanie wielu zadanek z danej dziedziny wybitnie zwiększa prędkość i jakość myślenia. end{enumerate} paragraph{textbf{Teoria} - czyli parę twierdzeń} begin{enumerate} item Twierdzenie Fermata: jeżeli p jest pierwsze, to $p|a^p - a$ dla dowolnego a całkowitego. item Eee, chyba na razie więcej nie potrzeba :) end{enumerate} paragraph{textbf{Zadania łatwe}} begin{enumerate} item Dla jakich n istnieje taki x całkowite, że liczba $1!+2!+cdots+n!$ jest równa x^2?\ textbf{Rozwiązanie}: Popatrzmy na reszty modulo 5. Wiemy, że dla $mgeq5$ jest $n!equiv 0 (mod 5)$, a $1!+2!+3!+4!equiv 3 (mod 5)$, stąd $1!+2!+cdots+n!equiv 3 (mod 5)$, dla $ngeq 5$. Możemy też, patrząc na reszty $0^2,1^2,2^2,3^2,4^2$ z dzielenia przez 5 stwierdzić, że żaden kwadrat licby całkowitej nie daje reszty 3. Stąd dla $ngeq 5$ nie istnieje takie x. Ręcznie sprawdzamy przypadki $1,2,3,4$ i stwierdzamy, że x spełniające warunki zadania istnieje tylko dla $n=1$ lub $n=3$. item Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^3 - y^3 = 91$.\ textbf{Rozwiązanie}: Zauważmy, że $91=x^3 - y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. Mamy więc 8 możliwości: $$x-y=-91 wedge x^2+xy+y^2 = -1$$ $$x-y=-13 wedge x^2+xy+y^2 =-7$$ $$x-y=-7 wedge x^2+xy+y^2 =-13$$ $$x-y=-1 wedge x^2+xy+y^2 =-91$$ $$x-y=1 wedge x^2+xy+y^2 =91$$ $$x-y=7 wedge x^2+xy+y^2 =13$$ $$x-y=13 wedge x^2+xy+y^2 =7$$ $$x-y=91 wedge x^2+xy+y^2 =1$$ Zauważmy, że skoro $x^3 - y^3=91 > 0$, to $x - y >0$ (bo funckja $f(x)=x^3$ jest rosnąca), co pozwala nam wyeliminować 4 pierwsze przypadki. Pozostałe 4 przypadki prowadzą, po podstawieniu x lub y, do 4 równań kwadratowych, z których każde daje rozwiązanie. item Dane są liczby naturalne n, k większe od 1, takie, że liczba $p=2k-1$ jest pierwsza. Rozstrzygnąć, czy jeżeli $p| binom{n}{2} - binom{k}{2}$, to $p^2| binom{n}{2} - binom{k}{2}$.\ textbf{Rozwiązanie}: Odpowiedź: textbf{tak}. Mamy $$binom{n}{2} - binom{k}{2} = frac{(n-k)(n+k-1)}{2}=frac{(n-k)(n-k+p)}{2}$$. Skoro $p| binom{n}{2} - binom{k}{2}$, to $p|n-k$ lub $p|n-k+p$. Ale liczby $n-k$ i $n-k+p$ dają takie same reszty z dzielenia przez p, to stąd wynika, że $p|n-k$ textbf{i} $p|n-k+p$, więc $p^2|(n-k)(n+k-1)$, a skoro p jest nieparzyste, więc względnie pierwsze z 2, to $p^2| frac{(n-k)(n+k-1) }{2} = binom{n}{2} - binom{k}{2}$. item 6 liczb pierwszych jest sześcioma kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Udowodnić, że różnica tego ciągu jest nie mniejsza od 30.\ textbf{Rozwiązanie}: Oznaczmy jako p pierwszy z tych 6 wyrazów, a jako r różnicę ciągu. Udowodnimy, że $30|r$. To już da nam tezę, bowiem skoro ciąg jest rosnący, to $r>0$, a najmniejszą liczbą większą od 0 i podzielną przez 30 jest 30, czyli $rgeq 30$.\ Liczby pierwsze z zadania to p, $p+r$, $p+2r$, $p+3r$, $p+4r$, $p+5r$. Wykorzystajmy fakt z zadania 3. z kółka nt. Dirichleta: begin{lem} Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $pnot|a$. Wtedy zbiór ${0a,1a,2a,cdots,(p-1)a}$ zawiera te same liczby co ${0,1,cdots,p-1}$ (ogólniej wystarczy, że a i p są względnie pierwsze, bez warunku, że p jest pierwsza). end{lem} Widzimy więc, że jeżeli $2not|r$,to zbiór $0,r$ zawiera wszystkie reszty z dzielenia przez 2, czyli któraś z liczb $p, p+r$ jest parzysta. Skoro 2 jest njamniejszą iczbą pierwszą, to $p=2$. Ale wtedy liczba $p+2r=2(r+1)$ jest parzysta. Sprzeczność. Stąd wnosimy, że $2|r$. W tym ciągu nie wystepuje więc liczba 2, bo skoro $2|r$, to wtedy wszystkie liczby w ciągu byłyby parzyste (bo różnią się one o wielokrotność r).\   Analogicznie dowodzimy, że $3|r$ (korzystając z tego że teraz najmniejszą możliwą liczbą pierwszą jest 3) i że $5|r$. A stąd $30|r$.   end{enumerate}   paragraph{textbf{Zadania trudniejsze} z kółka mat. V LO w Krakowie}   begin{enumerate}   item Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie $y^2=x^3+16$.\   textbf{Rozwiązanie}: Przekształćmy równanie do postaci $x^3=(y-4)(y+4)$. Zauważmy, że największy wspólny dzielnik liczb $y-4$ i $y+4$ jest też dzielnikiem liczby $(y+4)-(y-4)=8$. Rozważmy 2 przypadki: begin{enumerate}   item $NWD(y-4,y+4)=1$.   begin{lem}   Niech $x^3 = ab$ ($x,a,binmathbb{Z}$) i niech $NWD(a,b)=1$. Wtedy $a=y^3$ i $b=t^3$ dla pewnych y,t całkowitych.   end{lem}   textbf{Dowód lematu}: Rozkład na czynniki pierwsze. $x^3=p_1^{3a_1}p_2^{3a_2}cdots p_n{3a_n}$, gdzie p_1 to różen liczby pierwsze a a_i są całkowite. Skoro a,b są względnie pierwsze, to nie ma takiego p_i, że $p_i|a$ i $p_i|b$. Ale mamy $ab=x^3$, czyli $p_i^{3a_i}|ab$, więc i $$forall_{1leq ileq n} p_i^{3a_i}|a vee p_i^{3a_i}|b$$. Stąd a i b są postaci np. $a=p_1^{3a_1}p_3^{3a_3}cdots p_{n-1}^{3a_{n-1}}=(p_1^{a_1}p_3^{a_3}cdots p_{n-1}^{a_{n-1}})^3$ i $b=p_2^{3a_2}cdots p_n^{3a_n}=(p_2^{a_2}cdots p_n^{a_n})^3$, czyli są one sześcianami.\ $ $\Stosując lemat do liczb $y-4$ i $y+4$ dostajemy, że $y-4=a^3$ i $y+4=b^3$, stąd $b^3=y+4=(y-4)+8=a^3+8$, więc $b^3 = a^3 + 2^3$.\   Zauważmy, że jeżeli $b geq 3$, to $b^3 = (b-1)^3 + 3b^2 - 3b + 1 geq (b-1)^3 + 9b - 3b + 1 = 6b + 1geq (b-1)^3 + 19 geq a^3 + 19 > a^3 + 8$, więc musi być $b -3$ i ręcznie obliczamy przypadki $-2,-1,0,1,2$, które dają nam rozwiązania (a,b) równe $(-2, 0)$ lub $(0,2)$, co prowadzi do rozwiązań (x,y) równe $(0,-4)$ i $(0,4)$.   item $2|y$. Wtedy $y=2y'$ ($y'inmathbb{Z}$): $4y'^2=x^3+16$. Widzimy, że $2|x$. Niech $x=2x'$, gdzie $x'inmathbb{Z}$: $4y'^2 = 8x'^3 + 16$. Skracając: $$ y'^2 = 2x'^3 + 4$$ Skoro prawa strona jest parzysta, to $2|y'$. Niech $y'=2y''$ ($y''inmathbb{Z}$). Podstawiając: $2y''^2= x'^3 + 2$. Stąd mamy $2|x'$ i $x'=2x''$ ($x''inmathbb{Z}$), a po podstawieniu i skróceniu $$y''^2 = 4x''^3 + 1$$. Stąd widzimy, że $2not|y''$, więc $y''=2k+1$ ($kinmathbb{Z}$): $4k^2 + 4k + 1 = 4''x^3 + 1$, czyli $k^2 + k = x''^3$ a po zwinięciu $$k(k+1)=x''^3$$. Liczby k i $k+1$ są oczywiście względnie pierwsze (jako kolejne liczby całkowite - ich NWD dzieli również $k+1 - k =1$), więc z poprzedniego popdpunktu wiemy, że k i $k+1$ są sześcianami liczb całkowitych. Ale takie pary sześcianów liczb całkowitych są tylko dwie $0,1$ i $-1,0$ (szacujemy podobnie jak w równaniu $b^3 = a^3 + 8$). Stąd $k=0$ lub $k=-1$, więc $y=4$ lub $y=-4$, co prowadzi do rozwiązań $(0,4)$ i $(0,-4)$ (x wyliczamy z równania początkowego), a po uwzględnieniu $x,y>0$, do braku rozwiązań :)   end{enumerate}   item Udowodnić, że równanie $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.\   textbf{Rozwiązanie}: Jeżeli mamy udowodnić, że coś posiada nieskończenie wiele rozwiązań w $mathbb{Z}$, to zwykle najprościej jest skonstruować te rozwiązania (np. w zależności od parametru, żeby wyszło nieskończenie dużo).\   Żeby zrozumieć, jak należy konstruować, dobrze jest najpierw znaleźć trochę przykładów rozwiązań (choć czasami o wiele lepiej jest patrzeć tylko na niektóre rozwiązania). Ale podstawianie $a=1,2,3$ nie daje rozwiązań. Hm, może Yogi znowu się pomylił i powinno być "nie ma rozwiązań"? Spróbujmy wziąć jakieś modulo. Do kwadratów niegłupio idzie modulo 8 - dają one reszty tylko $0,1,4$, lub modulo 4 - reszty $0,1$.\   Weźmy to równanie modulo 4. Lewa strona może dawać reszty $0+0=0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 =2$, a prawa $0 + 3 = 3, 1 + 3 =0$. Aha, więc żeby działało, to lewa i prawa dają resztę 0, więc a,b są parzyste, a c jest nieparzyste. To pozwala znaleźć pierwsze rozwiązania (a,b,c) równe

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 17:20 - Poprawiony niedziela, 07 lutego 2010 17:39

$(4,6,7)$ i $(6,16,17)$.\   Co jest widoczne w tych rozwiązaniach? $c = b+1$. Oczywiście! Jeżeli podstawimy $b = c-1$ do równania, to pozbywamy się jednego parametru, ale mamy $a^2 + (c-1)^2 = c^2 + 3$, skąd po skróceniu dostajemy $a^2 = 2(c+1)$. Jasne, musi być $2|a$, czyli $a=2k$ i wtedy $4k^2 = 2(c+1)$, więc $2k^2 = c + 1$ i $c = 2k^2 - 1$. Jakiekolwiek k całkowite weźmiemy, dostaniemy rozwiązanie $(2k, 2k^2 - 2, 2k^2 - 1)$. Na wszelki wypadek sprawdźmy - $(2k)^2 + (2k^2 - 2)^2=4k^2 + 4k^4 - 8k^2 + 4 = 4k^4 - 4k^2 + 4 = (4k^4 - 4k^2 +1)+3 = (2k^2 - 1)^2 + 3$. Zgadza się!\   Najlepsze jest to, że w rozwiązaniu wystarczy napisać, że dla dowolnego $kinmathbb{Z}$ trójka $(2k, 2k^2 - 2, 2k^2 - 1)$ spełnia to równanie (i sprawdzić to, jak powyżej) oraz przeszacować, że jeżeli $k geq 2$, to te liczby są dodatnie (mamy znaleźć rozwiązania dodatnie). Całe powyższe rozumowanie jest napisane tylko poglądowo, żeby było wiadomo skąd się wziął wynik, ale na OMie nie potrzeba akurat tego pisać.   item Rozwiązać równanie $(x+y)(1+xy)=2^b$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, b.\   textbf{Rozwiązanie}: Jeżeli w równaniu zamienimy x,y miejscami, to nic się nie zmieni. Mówimy, że równanie jest textbf{symetryczne ze względu na x,y}. Możemy więc założyć $xleq y$ (jeżeli jest inaczej, to zamieniamy miejscami).\   Musi być $x+y=2^a$ i $1+xy=2^b$ dla pewnych $a,binmathbb{Z}$, $a,b,geq0$. Jeżeli $x=1$, to musi być $y=2^{frac{b}{2}}-1$, więc $2|b$ i równania są spełnione dla wszystkich b parzystych. W dalszej części będziemy zakładać, żę $x,ygeq2$ (i tym samym $a,bgeq2$). Ponadto, jeżeli $a=b$, to $x+y=1+xy$, czyli $(x-1)(y-1)=0$, więc $x=1$ lub $y=1$, czyli nie musimy rozważać tego przypadku.\ Zauważmy, że skoro $1+xy = 2^b$, to $2|1 + xy$, czyli $2not|xy$, czyli $2not|x wedge 2not|y$, więc możemy wziąć $x=2k+1, y=2l+1$, gdzie $k,linmathbb{Z}$. Podstawiając: $$2k + 2l + 1 = 2 ^a$$ $$1 + 4kl + 2k + 2l + 1 = 2 ^ b$$ Pierwsze równanie po podzieleniu przez 2 ma postać $k + l + 1 = 2^{a-1}$. Skoro $a geq 2$, to $2|2^{a-1}$, więc $2|k + l + 1$. To oznacza, że dokładnie jedna spośród liczb k,l jest parzysta. Skoro powyższe równania są symetryczne ze względu na k,l, to możemy założyć, że $2|k$ i $2not|l$.\   Mamy $2 ^ b = 1 + 4kl + 2k + 2l + 1 = 4kl + (2k +2l + 2)=4kl + 2^a$, czyli $4kl = 2^b - 2^a$, więc $kl = 2^{b-2} - 2^{a-2}$ (pamiętajmy, że $a,bgeq 2$, więc wciąż to jest całkowite oraz $aneq b$, więc jest to niezerowe, tak naprawdę dodatnie). Dalej $kl = 2^{b-2} - 2^{a - 2} = 2^{a-2}(2^{b-a} - 1)$, czyli $2^{a-2}|kl$, a skoro $2not|l$, to $$2^{a-2}|k$$ (kluczowy moment), czyli $k = q cdot 2^{a-2}$. Ale $k + l + 1 = 2 ^ {a-1}$, czyli $k < 2 cdot 2^{a-2}$. Stąd $q=1$ i $$k = 2^{a-2}$$.\   Stąd $l=2^{a-2}-1$ (z pierwszego równania) oraz $l = 2^{b-a} - 1$ (z drugiego równania), czyli $b = 2a - 2$. Otrzymaliśmy więc 2 ciągi rozwiązań: $(k,l) = (2^{a-2} , 2^{a-2} - 1)$ oraz (pamiętajmy o symetryczności) $(k,l)=(2^{a-2}-1, 2^{a-2})$. Wracając do oznaczeń x,y te ciągi przechodzą na rozwiązania $(x,y) = (2^{a-1}-1, 2^{a-2}+1)$ oraz $(x,y)=(2^{a-1}+1, 2^{a-1}-1)$.\ Odpowiedź: Wszystkie rozwiązania tego równania to: $$x=1, y=2^k-1, b = 2k$$ $$x=2^k-1, y=1, b = 2k$$ $$x=2^k-1, y=2^k+1, b=3k+1$$ $$x=2^k+1, y=2^k-1, b=3k+1$$ dla $kinmathbb{Z}$, $kgeq 1$ (dodatnie!).   item (Lepiej nie ruszać, nie wiem na ile trudne) Niech p - pierwsza, taka, że $2p+1$ również pierwsza. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^p + 2 y^p + 5 z^p = 0$.   textbf{Rozwiązanie}: Kiedy indziej :)   end{enumerate} end{document}