# Średnie, nieco trudniejsze

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 17:29 - Poprawiony niedziela, 07 lutego 2010 17:41

** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

## Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % ------------------------------------------------------------ vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS ---------------------------------------------------- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Czy wiesz, co to średnie?} date{} maketitle paragraph{Teoria} begin{enumerate} item Jeżeli liczby $a_1,cdots,a_n$ są dodatnie, to [frac{n}{frac{1}{a_1}+frac{1}{a_2}+cdots+frac{1}{a_n}}leq sqrt[n]{a_1a_2cdots a_n}leq frac{a_1+a_2+cdots+a_n}{n}leq sqrt{frac{a_1^2+a_2^2+cdots+a_n^2}{n}}] item Dla dwóch liczb wygląda to nieco niewinniej: Jeśli $a,b>0$, to [frac{2}{frac{1}{a}+frac{1}{b}}leq sqrt{ab}leq frac{a+b}{2}leq sqrt{frac{a^2+b^2}{2}}] item Do rządzenia służy tzw. średnia ważona:\ Jeżeli liczby $a_1,cdots,a_n,w_1,cdots,w_n$ są dodatnie, i $w_1+cdots+w_n=1$, to: [frac{1}{frac{w_1}{a_1}+cdots+frac{w_n}{a_n}}leq a_1^{w_1}a_2^{w_2}cdots a_n^{w_n}leq w_1a_1+w_2a_2+cdots+w_na_n]  end{enumerate}  paragraph{Zadania}  begin{enumerate}  item Pokaż, że dla $a_1,a_2,cdots,a_n$ - jednego znaku, zachodzi $frac{a_1}{a_2}+frac{a_2}{a_3}+cdots+frac{a_n}{a_1}geq n$.  item Pokaż, bez głupich obliczeń, że jeżeli $a,b,c>0$, to $(a+b)(b+c)(c+a)geq 8abc$.  item Analogicznie jak powyżej, udowodnij, że $(a+b)^4geq 8ab(a^2+b^2)$.  item Udowodnij, że dla dowolnych $a,b,c$ dodatnich zachodzi [frac{2}{a+b}+frac{2}{b+c}+frac{2}{c+a}geq frac{9}{a+b+c}]  item Udowodnij, że dla $a,binmathbb{R}$ jest [4b^2+a^2geq 4ab]  item Udowodnij, że dla $a,b,c,dinmathbb{R}$ jest [abcd-frac{1}{16}leq frac{a^2}{2}+frac{b^4}{4}+frac{c^8}{8}+frac{d^{16}}{16}]  item Rozstrzygnij, jaka jest największa stała $C$, taka, że dla wszystkich dodatnich $x,y,z$ jest [x+2y+3zgeq Cx^{frac{1}{6}}y^{frac{1}{3}}z^{frac{1}{2}}]  %item Rozstrzygnij, jaka jest największa stała $C$, taka, że dla wszystkich dodatnich $x,y,z$ jest [x+y+y^2+z+z^2+z^3geq Cx^{frac{1}{3}}y^{frac{2}{3}}z]  item Pokazać, że dla dowolnych $a,b,c,dinmathbb{R}_+$ zachodzi [a+b+c+dgeq frac{15}{2^{frac{34}{15}}}sqrt[15]{ab^2c^4d^8}]  item Pokazać, że jeśli $a,b,c>0$, to $a^2+b^2+c^2+2a+2b+2cgeq 3((ab)^{frac{2}{3}}+(bc)^{frac{2}{3}}+(ca)^{frac{2}{3}})$  item Pokazać, że jeżeli $x,y,z>0$, to [frac{x+y+z}{3}geq sqrt{frac{xy+yz+zx}{3}}]  item (Czy pamiętasz co się robi w trójkątach?) Wykaż, że jeżeli $a,b,c$ - boki pewnego trójkąta, to [frac{a}{b+c-a}+frac{b}{a+c-b}+frac{c}{a+b-c}geq 3]  item Liczby dodatnie $a,b,c$, są takie, że $a+b+c=1$. Wykazać, że [a^2+b^2+c^2+sqrt{12abc}leq 1]  item Udowodnić, że jeśli $a,b,c>0$ i $a+b+c=1$, to [(1+a)(1+b)(1+c)geq 8(1-a)(1-b)(1-c)]  item Liczby dodatnie $a,b,c$ spełniają warunek $ab+bc+ca=abc$. Dowieść, że: [frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+frac{c^4+a^4}{ca(a^3+c^3)}geq 1]  item Niech $a_1,cdots,a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $a_1a_2cdots a_kgeq 1$ dla każdego $1leq kleq n$. Udowodnić, że: [frac{1}{1+a_1}+frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)}+cdotsfrac{n}{(1+a_1)(1+a_2)cdots(1+a_n)}0$, to [frac{2}{frac{1}{a}+frac{1}{b}}leq sqrt{ab}leq frac{a+b}{2}leq sqrt{frac{a^2+b^2}{2}}]  item Do rządzenia służy tzw. średnia ważona:\  Jeżeli liczby $a_1,cdots,a_n,w_1,cdots,w_n$ są dodatnie, i $w_1+cdots+w_n=1$, to:  [frac{1}{frac{w_1}{a_1}+cdots+frac{w_n}{a_n}}leq a_1^{w_1}a_2^{w_2}cdots a_n^{w_n}leq w_1a_1+w_2a_2+cdots+w_na_n]  item textbf{Umowa} Jeżeli mamy liczby $a_1,cdots,a_n$ w zadaniu (a nie mamy $a_{n+1}$) to umawiamy się, że $a_{n+1}=a_1,a_{n+2}=a_2$ itd.  end{enumerate}  paragraph{Zadania}  begin{enumerate}  item Pokaż, że dla niezerowych liczb jednego znaku $a_1,a_2,cdots,a_n$, zachodzi $frac{a_1}{a_2}+frac{a_2}{a_3}+cdots+frac{a_n}{a_1}geq n$.  rozw  Skoro $a_n$ są jednego znaku, to $frac{a_i}{a_{i+1}}>0$ dla wszystkich $i$. Stąd i z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną: [frac{frac{a_1}{a_2}+frac{a_2}{a_3}+cdots+frac{a_n}{a_1}}{n}geq sqrt[n]{frac{a_1}{a_2}cdotfrac{a_2}{a_3}cdotcdotscdotfrac{a_n}{a_1}}=sqrt[n]{1}=1]  Stąd już wynika teza.    item Pokaż, bez głupich obliczeń, że jeżeli $a,b,c>0$, to $(a+b)(b+c)(c+a)geq 8abc$.\  textbf{Rozwiązanie}: \  Mamy, z nierówności między średnią  arytmetyczną i geometryczną  [frac{a+b}{2}geqsqrt{ab}]  [frac{b+c}{2}geqsqrt{bc}]  [frac{c+a}{2}geqsqrt{ca}]  Mnożąc te 3 nierówności stronami i mnożąc otrzymaną nierówność przez $8$ dostajemy tezę.  item Analogicznie jak powyżej, udowodnij, że $(a+b)^4geq 8ab(a^2+b^2)$.\  textbf{Rozwiązanie}: \  Mamy $(a+b)^4=(a^2+2ab+b^2)^2$. Ponadto [frac{(a^2+b^2)+2ab}{2}geq sqrt{2ab(a^2+b^2)}]  Stąd [(a+b)^4=4cdot(frac{a^2+2ab+b^2}{2})^2geq 4cdot 2ab(a^2+b^2)=8ab(a^2+b^2)]    item Udowodnij, że dla dowolnych $a,b,c$ dodatnich zachodzi [frac{2}{a+b}+frac{2}{b+c}+frac{2}{c+a}geq frac{9}{a+b+c}]  textbf{Rozwiązanie}: \  Z nierówności między średnia harmoniczną i arytmetyczną dla liczb $frac{a+b}{2},frac{b+c}{2},frac{c+a}{2}$ jest [frac{a+b+c}{3}=frac{frac{a+b}{2}+frac{b+c}{2}+frac{c+a}{2}}{3}geq frac{3}{frac{2}{a+b}+frac{2}{b+c}+frac{2}{c+a}}]  Po przekształceniu (wymnożeniu stronami przez mianowniki i podzieleniu przez $a+b+c$) otrzymujemy tezę.    item Udowodnij, że dla $a,binmathbb{R}$ jest [4b^2+a^2geq 4ab]  textbf{Rozwiązanie}: \  Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb $a^2,4b^2$ otrzymujemy [frac{a^2+4b^2}{2}geq sqrt{4a^2b^2}=2ab]    item Udowodnij, że dla $a,b,c,dinmathbb{R}$ jest [abcd-frac{1}{16}leq frac{a^2}{2}+frac{b^4}{4}+frac{c^8}{8}+frac{d^{16}}{16}] textbf{Rozwiązanie}: \  Po przekształceniu (nie ma niejsca dla minusów w nierównościach) teza przymuje postać $abcdleq frac{a^2}{2}+frac{b^4}{4}+frac{c^8}{8}+frac{d^{16}}{16}+frac{1}{16}$.\  Wynika ona z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną ważoną dla liczb $a^2,b^4,c^8,d^16,1$ i wag $frac{1}{2},frac{1}{4},frac{1}{8},frac{1}{16},frac{1}{16}$ otrzymujemy:\  [frac{a^2}{2}+frac{b^4}{4}+frac{c^8}{8}+frac{d^{16}}{16}+frac{1}{16}geq a^{2frac{1}{2}}b^{4frac{1}{4}}c^{8frac{1}{8}}d^{16frac{1}{16}}1^{frac{1}{16}}=abcd]  Zauważmy, że to samo otrzymamy biorąc średnią arytmetyczną i geometryczną z $16$ liczb\ $underbrace{frac{a^2}{16},frac{a^2}{16},cdots,frac{a^2}{16}}_{8},frac{b^4}{16},frac{b^4}{16},frac{b^4}{16},frac{b^4}{16},frac{c^8}{16},frac{c^8}{16},frac{d^{16}}{16},frac{1}{16}$. Średnie ważone, o ile wagi są wymierne, to po prostu wygodniej zapisane średnie zwykłe.    item Rozstrzygnij, jaka jest największa stała $C$, taka, że dla wszystkich dodatnich $x,y,z$ jest [x+2y+3zgeq Cx^{frac{1}{6}}y^{frac{1}{3}}z^{frac{1}{2}}]  textbf{Rozwiązanie}: \  Dla $x=y=z=1$ mamy nierówność $6geq C$, stąd musi być $Cleq 6$.\  Udowodnimy, że $C=6$. Faktycznie, ze średniej arytmetycznej i geometrycznej dla $x,y,y,z,z,z$ mamy  [frac{x+y+y+z+z+z}{6}geq sqrt[6]{xy^2z^3}=x^{frac{1}{6}}y^{frac{1}{3}}z^{frac{1}{2}}] Stąd po przekształceniu otrzymujemy $x+2y+3zgeq 6x^{frac{1}{6}}y^{frac{1}{3}}z^{frac{1}{2}}$, dowodzi, że $Cgeq 6$, a więc $C=6$. %item Rozstrzygnij, jaka jest największa stała $C$, taka, że dla wszystkich dodatnich $x,y,z$ jest [x+y+y^2+z+z^2+z^3geq Cx^{frac{1}{3}}y^{frac{2}{3}}z]  item Pokazać, że dla dowolnych $a,b,c,dinmathbb{R}_+$ zachodzi [a+b+c+dgeq frac{15}{2^{frac{34}{15}}}sqrt[15]{ab^2c^4d^8}] rozw  Teza wynika wprost z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb\ $a,frac{b}{2},frac{b}{2},frac{c}{4},frac{c}{4},frac{c}{4},frac{c}{4},underbrace{frac{d}{8},cdots,frac{d}{8}}_{8}$: [frac{a+b+c+d}{15}=frac{a+frac{b}{2}+frac{c}{4}+frac{c}{4}+frac{c}{4}+frac{c}{4}+underbrace{frac{d}{8},cdots,frac{d}{8}}_{8}}{15}geq sqrt[15]{a(frac{b}{2})^2(frac{c}{4})^4(frac{d}{8})^8}]  Inaczej mówiąc stosujemy tutaj średnią ważoną między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb $a,frac{b}{2},frac{c}{4},frac{d}{8}$ i wag $frac{1}{15},frac{2}{15},frac{4}{15},frac{8}{15}$.    item Pokazać, że jeśli $a,b,c>0$, to $a^2+b^2+c^2+2a+2b+2cgeq 3((ab)^{frac{2}{3}}+(bc)^{frac{2}{3}}+(ca)^{frac{2}{3}})$  rozw  Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną otrzymujemy  [frac{a^2+b+b}{3}geq sqrt[3]{a^2cdot bcdot b}=(ab)^{frac{2}{3}}]  [frac{b^2+c+c}{3}geq sqrt[3]{b^2cdot ccdot c}=(bc)^{frac{2}{3}}] [frac{c^2+a+a}{3}geq sqrt[3]{c^2cdot acdot a}=(ca)^{frac{2}{3}}]  Po ich zsumowaniu dostajemy tezę.  item Pokazać, że jeżeli $x,y,z>0$, to   [frac{x+y+z}{3}geq sqrt{frac{xy+yz+zx}{3}}]  rozw Po podniesieniu obu stron nierówności do kwadratu otrzymujemy $(x+y+z)^2geq 3(xy+yz+zx)$. To wynika z nierówności $x^2+y^2+z^2geq xy+yz+zx$, którą udowadniamy przy pomocy średnich.  item (Czy pamiętasz co się robi w trójkątach?) Wykaż, że jeżeli $a,b,c$ - boki pewnego trójkąta, to [frac{a}{b+c-a}+frac{b}{a+c-b}+frac{c}{a+b-c}geq 3] rozw Weźmy $x=frac{b+c-a}{2}$, $y=frac{a+c-b}{2}$,$z=frac{a+b-c}{2}$. Z tego, że $a,b,c$ - boki trójkąta wynika, że $x,y,z>0$. Teza jest równoważna, po podstawieniu [frac{y+z}{x}+frac{x+z}{y}+frac{x+y}{z}geq 6] Można ją otrzymać sumując 3 nierówności (prawdziwe na mocy śr. aryt. i geom.) [frac{y}{x}+frac{x}{y}geq 2] [frac{z}{x}+frac{x}{z}geq 2] [frac{y}{z}+frac{z}{y}geq 2] item Liczby dodatnie $a,b,c$, są takie, że $a+b+c=1$. Wykazać, że [a^2+b^2+c^2+sqrt{12abc}leq 1] rozw Musimy sprowadzić wszystkie części wyrażenia do wspólnego stopnia (inaczej mówiąc otrzymać wyrażenie jednorodne). $a^2+b^2+c^2$ ma stopień $2$, $sqrt{12abc}$ ma stopień $frac{3}{2}$, a $1$ ma stopień $0$. Podstawiamy więc i otrzymujemy: [a^2+b^2+c^2+sqrt{12abc(a+b+c)}leq (a+b+c)^2] Po rozbiciu $(a+b+c)^2$ i redukcji to wyrażenie przyjmuje postać $sqrt{3abc(a+b+c)}leq ab+bc+ca$. Po podstawieniu $x=ab,y=bc,z=ca$ i podniesieniu do kwadratu otrzymujemy nierówność $3(xy+yz+zx)leq (x+y+z)^2$, którą udowadniamy bezpośrednio. item Udowodnić, że jeśli $a,b,c>0$ i $a+b+c=1$, to [(1+a)(1+b)(1+c)geq 8(1-a)(1-b)(1-c)] rozw Podstawiamy wszędzie $1=a+b+c$ i otrzymujemy [(b+c+2a)(a+c+2b)(a+b+2c)geq 8(a+b)(b+c)(c+a)] Jeżeli podstawimy teraz $x=a+b,y=a+c,z=b+c$ to otrzymujemy nierówność $(x+y)(y+z)(z+x)geq 8xyz$, która była już wcześniej udowodniona. item (LVII OM - 2 etap) Liczby dodatnie $a,b,c$ spełniają warunek $ab+bc+ca=abc$. Dowieść, że: [frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+frac{c^4+a^4}{ca(a^3+c^3)}geq 1] rozw Po lewej stronie mamy stopień $-1$, po prawej $0$. Mnożymy lewą stronę przez $abc$, a prawą przez $ab+bc+ca$, żeby otrzymać równe stopnie: [frac{c(a^4+b^4)}{a^3+b^3}+frac{a(b^4+c^4)}{b^3+c^3}+frac{b(c^4+a^4)}{a^3+c^3}geq ab+bc+ca] Zauważmy, że [frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}geq frac{a+b}{2}] (po wymnożeniu przez mianowniki i zredukowaniu wychodzi $(a^3-b^3)(a-b)geq 0$, czyli $(a^2+ab+b^2)(a-b)^2geq 0$). Stosując tę nierówność do 3 członów otrzymujemy [frac{c(a^4+b^4)}{a^3+b^3}+frac{a(b^4+c^4)}{b^3+c^3}+frac{b(c^4+a^4)}{a^3+c^3}geq cfrac{a+b}{2}+afrac{b+c}{2}+bfrac{a+c}{2}=ab+bc+ca] item Niech $a_1,cdots,a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $a_1a_2cdots a_kgeq 1$ dla każdego $1leq kleq n$. Udowodnić, że: [frac{1}{1+a_1}+frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)}+cdots+frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)cdots(1+a_n)}