** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[OT4]{fontenc} usepackage[utf8]{inputenc} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin {document} title{Kółko 24.11 - indukcja^{-1}} date{} maketitle paragraph{textbf{Teoria}} begin{enumerate} %item Zasada indukcji matematycznej i rozszerzona zasada indukcji matematycznej ($T(1),T(2),...,T(n)Rightarrow T(n+1)$). item Zasada nieskończonego schodzenia (bez formalnej definicji, bo to się może przyśnić). end{enumerate} paragraph{textbf{Zadanka :) }} begin{enumerate} % item Klasyczny dowód nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną $frac{a_1+...+a_n}{n}geq sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, przez "`indukcję"' $T(n+1)Rightarrow T(n)$ i $T(n)Rightarrow T(2n)$. item Udowodnić, że $sqrt{2}$ nie jest wymierne. item Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$ w liczbach całkowitych nieujemnych. item Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^2+y^2+z^2+u^2=2xyzu$ w liczbach $mathbb{N}_+$. item Udowodnić, że 7 nie sa się przedstawić w postaci sumy 3 kwadratów liczb wymiernych dodatnich. item Udowodnij, że liczba postaci $4^n(8k-1)$, gdzie $k,ninmathbb{N}_+$ nie jest kwadratem innej liczby naturalnej i nie może być przedstawiona jako suma 1, 2 lub 3 kwadratów liczb naturalnych dodatnich. item Ciąg $a_1,...,a_n$ ($a_iinmathbb{N}_+$) przetwarzamy na ciąg postaci $frac{a_1+a_2}{2},frac{a_2+a_3}{2},...,frac{a_{n-1}+a_n}{2},frac{a_n+a_1}{2}$, ten ciąg przetwarzamy analogicznie itd. Udowodnij, że po pewnej liczbie takich operacji albo otrzymany ciąg będzie stały, albo będzie on zawierać wyrazy niecałkowite. item Niech $a_1,...,a_{2^n}$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Udowodnij, że jeśli utworzymy z niego nowy ciąg $l_1,l_2,cdots,l_{2^n}$ według reguły $l_k=|a_{k+1}-a_{k}|$ (umawiamy się, że $a_{2^n+1}=a_1$), a niego następny ciąg itd., to w końcu dojdziemy do ciągu złożonego z samych zer. Czy dla ciągu (a_n) jest to nadal prawdziwe, gdy n nie jest potęgą 2? end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[OT4]{fontenc} usepackage[utf8]{inputenc} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin {document} title{Kółko 24.11 - indukcja^{-1}} date{} maketitle paragraph{textbf{Zadanka}} begin{enumerate} item Udowodnić, że $sqrt{2}$ nie jest wymierne.\ Załóżmy, że $sqrt{2}$ jest wymierne. Jakoże jest ono większe od 0, to można je przedstawić w postaci $frac{p}{q}$, to gdzie $p, qin Z_+$. Mamy wtedy $sqrt{2}=frac{p}{q}$, a po podniesieniu do kwadratu i pomnżeniu przez q^2 dostajemy $2q^2=p^2$. Załóżmy, że p_0,q_0 jest parą o najmniejszej sumie spełniającą to równanie. Jest $2|p_0^2$, a stąd $2|p_0$. Niech $p_1=p_0/2$. Wtedy jest $2q_0^2=4p_1^2$, więc $4|2q_0^2$ i $2|q_0^2$. Tym samym $2|q_0$ i $q_0=q_1/2$, gdzie q_1 - całkowite. Mamy więc $2q_1^2=p_1^2$, co przeczy wyborowi p_0,q_0 jako pary o najmniejszej sumie (bo $p_0+q_0 > p_1 + q_1$). item Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$ w liczbach całkowitych nieujemnych.\ Weźmy dowolne rozwiązanie tego równania w liczbach x,y,z,t. Mamy dla takich liczb $8x^4+4y^4+2z^4=t^4$, a stąd $2|t$ i $t/2=t_1$, $t_1in Z$. Podstawiając dostajemy $8x^4+4y^4+2z^4=16t_1^4$, a po podzieleniu przez 2, $4x^4+2y^4+z^4=8t_1^4$, z czego wynika, że $2|z$ i $z/2=z_1$, $z_1in Z$. Po kolejnym podstawieniu i podzieleniu dostajemy $2x^4+y^4+8z_1^4=4t_1^4$, a więc $2|y$ i

$y/2=y_1$, gdzie $y_1in Z$. Powtarzając te operacje dostajemy $2|x$ i $x/2=x_1$, $x_1in Z$. Podstawiając to dostajemy $8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4$.\ Otrzymaliśmy to samo równanie, więc podane operacje możemy powturzyć n razy dla dowolnego n, stwierdzając, że $2^n|x$ i $2^n|y$ i $2^n|z$ i $2^n|t$ dla dowolnego n. Jedyną liczbą całkowitą podzielną przez dowolną potęgę 2 jest 0. Tym samym jedynym rozwiązaniem w liczbach całkowitych nieujemnych może być $(0,0,0,0)$. Te liczby faktycznie spełniają równanie. item Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$ w liczbach $mathbb{N}_+$.\ Zauważmy, że dla x,y,z,t spełniających to równanie musi być $2|x^2+y^2+z^2+t^2$. x^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 2, gdy x jest nieparzyste, a 0, gdy x parzyste. Stąd widzimy, że wśród liczb x,y,z,t musi być parzysta ilość nieparzystych. Rozważmy 3 przypadki: begin{enumerate} item 4 liczby x,y,z,t są nieparzyste. Jeżeli x jest nieparzyste, to $x^2equiv 1 (mod 8)$ (sprawdź), więc $x^2+y^2+z^2+t^2equiv 4 (mod 8)$. Ale mamy $2not|xyzt$, więc $4not|2xyzt$. Sprzeczność. item 2 liczby z x,y,z,t są nieparzyste. Wtedy mamy $x^2+y^2+z^2+t^2equiv 2 (mod 4)$, więc $4not|x^2+y^2+z^2+t^2$, a $4|xyzt$, więc sprzeczność. item Wszystkie liczby x,y,z,t są parzyste. Weźmy $x/2=x_1,y/2=y_1,z/2=z_1,t/2=t_1$. Dostajemy $4x_1^2+4y_1^2+4z_1^2+4t_1^2=2cdot16x_1y_1z_1t_1$, czyli $x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2=8xyzt$. Dalej biorąc $mod 8$ dostajemy łatwo, że x_1,y_1,z_1,t_1 są parzyste, więc możemy podstawić $x_2=x_1/2$ itd. Musi więć znowu być $2^n|x,y,z,t$ dla dowolnego $nin Z_+$, więc $x=y=z=t=0$. Ale te liczby nie są naturalne dodatnie, więc ostatecznie nie ma rozwiązań. end{enumerate} item Udowodnić, że 7 nie sa się przedstawić w postaci sumy 3 kwadratów liczb wymiernych dodatnich. Mamy $x^2equiv 1 (mod 8)$ lub $x^2equiv 4(mod 8)$, lub $x^2equiv 0(mod 8)$.\ Jeżeli $7=(frac{p_1}{q_1})^2+(frac{p_2}{q_2})^2+(frac{p_3}{q_3})^2$, gdzie $p_i,q_iin Z_+$, to wymnażając stronami $7(q_1q_2q_3)^2=(p_1q_2q_3)^2+(q_1p_2q_3)^2+(p_1p_2q_3)^2$. Jeżeli wykażemy, że równanie $7d^2=a^2+b^2+c^2$ w całkowitych nie ma rozwiązań, to wykażemy również tezę. Rozpatrzmy to równanie $(mod 8)$. $a^2+b^2+c^2$ daje reszty $0,1,2,3,4,5,6$ (sprawdź), zaś wyrażenie $7d^2$ daje reszty $0,7,4$. Widzimy, że reszty $mod 8$ są równe tylko jeśli $a^2+b^2+c^2$ przystaje do 0 lub 4 $(mod 7)$, a wtedy liczby (a,b,c,d) są parzyste (sprawdź) i podobnie jak w poprzednich zadaniach wnioskujemy, że $2^n|a,b,c,d$ dla dowolnego n. item Udowodnij, że liczba postaci $4^n(8k-1)$, gdzie $k,ninmathbb{N}_+$ nie jest kwadratem innej liczby naturalnej i nie może być przedstawiona jako suma 1, 2 lub 3 kwadratów liczb naturalnych dodatnich.\ Mamy udowodnić, że $4^n(8k-1)=a^2+b^2+c^2$, gdzie $a,b,cin N_+cup{0}$ nie ma rozwiązań. Faktycznie jeżeli $n=0$, to patrząc $mod 8$ otrzymujemy speczność bo $a^2+b^2+c^2 (mod 8)in{0,1,2,3,4,5,6}$. Jeżeli zaś $n>0$, to patrząc $mod 4$ dowiadujemy się, że $2|a,b,c$ i możemy podstawić $a_1=a/2$ i $b_1=b/2$, $c_1=c/2$ i podzielić przez 4, a dzielić przez 4 możemy skończoną ilość razy. % item Ciąg $a_1,...,a_n$ ($a_iinmathbb{N}_+$) przetwarzamy na ciąg postaci $frac{a_1+a_2}{2},frac{a_2+a_3}{2},...,frac{a_{n-1}+a_n}{2},frac{a_n+a_1}{2}$, ten ciąg przetwarzamy analogicznie itd. Udowodnij, że po pewnej liczbie takich operacji albo otrzymany ciąg będzie stały, albo będzie on zawierać wyrazy niecałkowite.\ % Popatrzmy na ciąg $frac{a_1+a_2}{2},frac{a_2+a_3}{2},...,frac{a_{n-1}+a_n}{2},frac{a_n+a_1}{2}$. Jeżeli ma on wyrazy całkowite, to znaczy, że $a_1equiv a_2equivcdotsequiv a_n (mod 2)$. Zauważmy, że jeżeli zapiszemy liczby a_i w systemie binarnym, to jeśli po przetworzeniu n razy otrzymamy wciąż ciąg całkowity, to znaczy, że na n pierwszych miejscach w zapisie binarnym liczby $a_1,cdots,a_n$ są identyczne (sprawdź przez indukcję). Jeżeli więc po każdej ilości przetworzeń ciąg wciąż będzie całkowity, znaczy, że początkowo wszystkie $a_1,cdots,a_n$ były równe, więc ciąg początkowy był stały (jak i każdy kolejny).   % item Niech $a_1,...,a_{2^n}$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Udowodnij, że jeśli utworzymy z niego nowy ciąg $l_1,l_2,cdots,l_{2^n}$ według reguły $l_k=|a_{k+1}-a_{k}|$ (umawiamy się, że $a_{2^n+1}=a_1$), a niego następny ciąg itd., to w końcu dojdziemy do ciągu złożonego z samych zer. Czy dla ciągu (a_n) jest to nadal prawdziwe, gdy n nie jest potęgą 2?\   % Może to jeszcze ktoś rozwali więc poczekam z ogłaszaniem rozwiązania.   end{enumerate} end{document}