
Zadania PDF.

Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} title{Ferie, a my nadal chodzimy do szkoły :) (Jednokładność)} date{} maketitle paragraph{Teoria} begin{enumerate} item Jednokładnością o skali k względem O (który nazywamy środkiem jednokładności) nazywamy przekształcenie płaszczyzny które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A', taki, że: begin{itemize} item A,O,A' - na jednej prostej item $|OA'|=|k||OA|$ item Jeżeli $k 0$, to po jednej. end{itemize} Strasznie formalnie wyszło... Alternatywna definicja: Jednokładność jaka jest, każdy widzi. item Jednokładność przenosi odcinki na odcinki, trójkąty na trójkąty, punkty szczególne, takie jak np. środek okręgu na punkty szczególne (nowych trójkątów), okręgi na okręgi. item Jednokładność zachowuje punkty przecięcia, czyli przenosi np. okręgi styczne na styczne, proste równoległe na równoległe (nawet na równoległe do prostych przed jednokładnością). item Złożenie dwóch jednokładności o skalach $alpha, beta$ jest: begin{itemize} item Jednokładnością o skali $alphabeta$, jeżeli $alphabetaneq1$ item Translacją, jeżeli $alphabeta=1$ (można na to patrzeć jak na jednokładność o nieskończonym środku) end{itemize} end{enumerate} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Udowodnić, że w trójkącie ABC środek ciężkości, ortocentrum i środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej (prostej Eulera). item Okrąg wpisany w $triangle ABC$ jest styczny do AB w punkcie E. Niech EF będzie średnicą tego okręgu. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC jest styczny do tego boku w G. Udowodnić, że punkty C,F,G są współliniowe. item Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie B. Średnica AC okręgu O_1 jest styczna do okręgu O_2 w M. Udowodnić, że BM jest dwusieczną kąta $angle ABC$. item (de facto Tales) Punkt P leży wewnątrz czrowokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnić, że: begin{enumerate} item Środki boków tego czworokąta tworzą równoległobok. item Środki ciężkości trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP tworzą równoległobok. item Policzyć pola tych równoległoboków. end{enumerate} item Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB tworzą sześciokąt, w którym przeciwległe boki są równoległe i równe. item (*) Okręgi o_1,o_2 o równych promieniach są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach A,B odpowiednio. Punkt P należy do okręgu o. Proste PA, PB przecinają okręgi o_1, o_2 w C,D. Udowodnić, że $CD||AB$. item (*) Okręgi O_1 i O_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P. Ponadto są one wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku Q. Niech R - punkt na O_1. Niech proste RP i RQ przecinają O_2 w 4 punktach. Udowodnić, że pewne 2 z tych punktów są średnicą O_2. item Wszystkie zadania z kółka ze staszica. Dzięki Ci Ula! end{enumerate} paragraph{Parę dodatkowych prostych zadań} begin{enumerate} item Dany jest trójkąt ABC, w którym $angle ACB=45$. Udowodnić, że $|CH|=|AB|$, gdzie H - ortocentrum ABC. item Punkty D,E,F leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Proste AD,BE,CF przecinają się w P. Wykazać, że jeżeli w czworokąty $AEPF$ i $BFPD$ można wpisać okręgi, to można je wpisać i w czworokąt $CEPD$. item Punkty E,F leżą na bokach BC,AD równoległoboku $ABCD$, przy czym $|BE|=|DF|$. Punkt K leży na boku CD. Odcinek EF przecina odcinki AK, BK w punktach P, Q. Udowodnić, że $P(AFP)+P(BEQ)=P(KPQ)$, gdzie $P(X)$ - pole figury X. item Zadania ze skryptu p. Pompe. item Wszelkie uwagi i błędy proszę zgłaszać. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} defrozw{\ textbf{Rozwiązanie}: \} title{Ferie, a my nadal chodzimy do szkoły :) (Jednokładność)} date{} maketitle paragraph{Teoria} begin{enumerate} item Jednokładnością o skali k względem O (który nazywamy środkiem jednokładności) nazywamy przekształcenie płaszczyzny które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A', taki, że: begin{itemize} item A,O,A' - na jednej prostej item $|OA'|=|k||OA|$ item Jeżeli $k 0$, to po jednej. end{itemize} Strasznie formalnie wyszło... Alternatywna definicja: Jednokładność jaka jest, każdy widzi. item Jednokładność przenosi odcinki na odcinki, trójkąty na trójkąty, punkty szczególne, takie jak np. środek okręgu na punkty szczególne (nowych trójkątów), okręgi na okręgi. item Jednokładność zachowuje punkty przecięcia, czyli przenosi np. okręgi styczne na styczne, proste równoległe na równoległe (nawet na równoległe do prostych przed jednokładnością). item Złożenie dwóch jednokładności o skalach $alpha, beta$ jest: begin{itemize} item Jednokładnością o skali $alphabeta$, jeżeli $alphabetaneq1$ item Translacją, jeżeli $alphabeta=1$ (można na to patrzeć jak na jednokładność o nieskończonym środku) end{itemize} end{enumerate} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Udowodnić, że w trójkącie ABC środek ciężkości, ortocentrum i środek okręgu opisanego leżą na jednej prostej (prostej Eulera). rozw Niech M oznacza środek ciężkości, H ortocentrum, a O środek okręgu opisanego.\ Zauważmy najpierw, że O pokrywa się z ortocentrum trójkąta DEF, gdzie D,E,F to środki boków BC,CA,AB odpowiednio (dowód z zadaniach przygotowawczych do OMa 2008, 2. seria).\ Wiemy, że trzy środkowe AD,BE,CF w trójkącie ABC przecinają się w środku ciężkości M i jest [frac{AM}{DM}=2,frac{BM}{EM}=2,frac{CM}{FM}=2] Niech J oznacza jednokładność o środku w M i skali $-frac{1}{2}$. Z powyższych równości wynika, że [J(A)=D,J(B)=E,J(C)=F] Stąd J przenosi $triangle ABC$ na $triangle DEF$, więc, jakoże jednokładność zachowuje punkty szczególne trójkąta, przenosi ona ortocentrum H trójkąta ABC, na ortocentrum DEF, czyli na O: [J(H)=O] To już dowodzi, że H,M,O są współliniowe, gdyż punkt, środek jednokładności i obraz punktu są zawsze współliniowe. item Okrąg wpisany w $triangle ABC$ jest styczny do AB w punkcie E. Niech EF będzie średnicą tego okręgu. Okrąg dopisany do boku AB trójkąta ABC jest styczny do tego boku w G. Udowodnić, że punkty C,F,G są współliniowe. rozw Niech o_1 oznacza okrąg wpisany w $triangle ABC$, a o_2 okrąg dopisany do boku AB. Niech J będzie jednokładnością o środku w C, która przekształca o_2 w o_1 (jednokładność taka zawsze istnieje, wystarczy wziąć jednokładność, która przekształca środek na środek) i niech $G'=J(G)$. Chcemy wykazać, że $G'=F$.\ Jednokładność zachowuje równoległość prostych, więc prosta l styczna do o_1 w G' jest równoległa do prostej stycznej do o_2 w G, czyli do prostej AB. Nie może być, $l=AB$, gdyż AB jest styczną do o_2 bliższą C, więc przechodzi na styczną do o_1 bliższą C (trochę to nieformalnie w tym miejscu).\ Prosta l jest więc styczną do o_1 w G' równoległą do AB i inną niż AB. Z tego już wynika, że prosta łącząca punkty styczności AB i l do o_1 jest średnicą o_1 (o jednym końcu w E), czyli $G'=F$ (wynika to z konstrukcji F).\ Stąd już wynika, że $C, J(G)=F, G$ są współliniowe, jako środek jednokładności, punkt i obraz punktu. item Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie B. Średnica AC okręgu O_1 jest styczna do okręgu O_2 w M. Udowodnić, że BM jest dwusieczną kąta $angle ABC$. rozw Niech C_2 będzie środkiem okręgu

O_2. Rozważmy jednokładność J o środku w B, przenoszącą O_1 na O_2. Niech $A'=J(A),C'=J(C)$. Z własności jednokładności $A'C'$ jest średnicą O_2 oraz $A'C'||AC$. Ponadto $ACperp MC_2$, bowiem AC jest styczną. Stąd $A'C'perp MC_2$, co w połączeniu z $|A'C_2|=|C'C_2|$ implikuje $|MA'|=|MC'|$.\ Punkt M jest więc środkiem łuku $A'C'$ okręgu opisanego na $A'BC'$, a przez ten punkt przechodzi dwusieczna, co było udowadniane wcześniej, więc prosta BM jest dwusieczną kąta $A'BC'$, a więc i ABC. item (de facto Tales) Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnić, że: begin{enumerate} item Środki boków tego czworokąta tworzą równoległobok. rozw Niech E,F,G,H będą środkami boków AB,BC,CD,DA odpowiednio. Z twierdzenia Talesa dla kątów o wierzchołkach B, D jest: [EF||AC, frac{|EF|}{|AC|}=frac{1}{2}] [GH||AC, frac{|GH|}{|AC|}=frac{1}{2}] Stąd $EF||GH$ i $|EF|=|GH|$, czyli $EFGH$ jest równoległobokiem. item Środki ciężkości trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP tworzą równoległobok. rozw Jednokładność J środku w P i skali $frac{2}{3}$ przenosi środki boków na środki ciężkości odpowiednich trójkątów, wynika to z faktu, że środkowe przecinają się w stosunku $2:1$. Oczywiście jednokładność przenosi równoległobok na równoległobok. item Policzyć pola tych równoległoboków. rozw Pole pierwszego równoległoboku wynosi $frac{1}{2}P_{ABCD}$, można to policzyć licząc pola trójkątów, które zostaną po obcięciu. Pole drugiego równoległoboku wynosi więc $(frac{2}{3})^2frac{1}{2}P_{ABCD}=frac{2}{9}P_{ABCD}$, z własności jednokładności. end{enumerate} item Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB tworzą sześciokąt, w którym przeciwległe boki są równoległe i równe. rozw Zauważmy, że para przeciwległych boków to np. środki ciężkości trójkątów: ABC,BCD i DEF,EFA.\ Niech M_1,M_2,M_3,M_4 oznaczają środki ciężkości ABC,BCD,DEF,EFA odpowiednio oraz niech G_1 oznacza środek boku BC, G_2 środek boku EF. Jednokładność względem G_1 o skali 3 przekształca M_1M_2 w AD, więc [M_1M_2||AD,frac{|M_1M_2|}{|AD|}=frac{1}{3}] Podobnie jednokładność względem G_2 o skali 3 przekształca M_3M_4 na AD, stąd [M_3M_4||AD,frac{|M_3M_4|}{|AD|}=frac{1}{3}] Z tych dwóch zależności już wynika teza dla tych boków. Dla pozostałych boków rozumujemy analogicznie. item (*) Okręgi o_1,o_2 o równych promieniach są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach A,B odpowiednio. Punkt P należy do okręgu o. Proste PA, PB przecinają okręgi o_1, o_2 w C,D. Udowodnić, że $CD||AB$. rozw Niech J_{o_2o} będzie jednokładnością względem B przenoszącą o_2 na o, a J_{oo_1} jednokładnością o środku w A przenoszącą o na o_1 oraz niech $J=J_{oo_1}circ J_{o_2o}=J_{oo_1}(J_{o_2o})$. Złożenie to przenosi punkt D na C, gdyż $J_{o_2o}(D)=P$, $J_{oo_1}(P)=C$ oraz przenosi punkty A,B na punkty leżące na prostej AB, gdyż, np. dla B $J_{o_2o}(B)=B$, więc $J(B)=J_{oo_1}(B)$, a $B,J_{oo_1}(B),A$ są współliniowe.\ Stąd J przenosi prostą AB na samą siebie.\ Policzmy, jaki jest iloczyn skal jednokładności J_{o_2o},J_{oo_1}. Niech O_1,O_2,O będą środkami, zaś $r_1,r_2=r_1,r$ promieniami o_1,o_2,o odpowiednio. Mamy [J_{o_2o}(O_2)=O,J_{o_2o}(B)=Bhbox{ skala wynosi: }frac{|BO|}{|BO_2|}=frac{r}{r_2}] Analogicznie wnioskujemy, że skala J_{oo_1} wynosi $frac{r_1}{r}=frac{r_2}{r}$. Iloczyn skal wynosi 1, więc J, jako złożenie jest translacją. Liczymy tylko wartość bezwględną, bo bezpośrednio widać, że obie skale są dodatnie.\ Skoro $J(D)=C$, to $J=T_{vec{DC}}$ (translacja o wektor DC), a skoro $J(AB)=AB$, to $CD||AB$. item (*) Okręgi O_1 i O_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P. Ponadto są one wpisane w kąty wierzchołkowe o wierzchołku Q. Niech R - punkt na O_1. Niech proste RP i RQ przecinają O_2 w

4 punktach. Udowodnić, że pewne 2 z tych punktów są średnicą O_2. rozw Niech J_Q będzie jednokładnością względem Q przenoszącą O_1 na O_2 i niech J_P będzie jednokładnością względem P przenoszącą O_1 na O_2. Niech $A=J_Q(R),B=J_P(R)$. Wtedy A,B należą do zbioru punktów przecięcia RP,RQ z O_2. Pozostaje wykazać, że AB jest średnicą O_2.\ Niewątpliwie $J_Pneq J_Q$, a więc $Aneq B$ (środek, punkt, obraz jednego punktu już definiuje jednokładność). Niech styczna do O_2 w A nazywa się a, a w B - b, a do O_1 w R - r. Z własności jednokładności mamy $a||r$ i $b||r$. Ponadto $aneq b$. Stąd już wynika, jak w zadaniu drugim, że AB to średnica. item Wszystkie zadania z kółka ze staszica. Dzięki Ci Ula! end{enumerate} paragraph{Parę dodatkowych prostych zadań} begin{enumerate} item Dany jest trójkąt ABC, w którym $angle ACB=45$. Udowodnić, że $|CH|=|AB|$, gdzie H - ortocentrum ABC. item Punkty D,E,F leżą na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Proste AD,BE,CF przecinają się w P. Wykazać, że jeżeli w czworokąty $AEPF$ i $BFPD$ można wpisać okręgi, to można wpisać okrąg i w czworokąt $CEPD$.\ textbf{Wskazówka}: Załóżmy, że mamy czworokąt wypukły $ABCD$ oraz, że półproste AB i DC przecinają się w E, a półproste AD i BC w F. Wtedy w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $AE+CF=AF+CE$. item Punkty E,F leżą na bokach BC,AD równoległoboku $ABCD$, przy czym $|BE|=|DF|$. Punkt K leży na boku CD. Odcinek EF przecina odcinki AK, BK w punktach P, Q. Udowodnić, że $P(AFP)+P(BEQ)=P(KPQ)$, gdzie $P(X)$ - pole figury X. item Zadania ze skryptu p. Pompe. item Wszelkie uwagi i błędy proszę zgłaszać. end{enumerate} end{document}