** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} defdeg{^{circ}} renewcommand{thethm}{} title{Przekręty płaszczyzny} date{} maketitle paragraph{Teoria} begin{enumerate} item begin{defn} Kątem skierowanym $angle ABC=angle (AB,BC)$ będziemy nazywać miarę kąta o jaki trzeba przekręcić płaszczyznę wokół B tak, by textbf{półprosta} BA przeszła na półprostą BC. Taki kąt jest dokładnie jeden z dokładnością do 360^{circ} i z tą dokładnością będziemy mierzyć. Ponadto, dla uzupełnienia definicji miary kąta skierowanego, zakładamy, że miara ta nie zmienia się przy przesunięciu o wektor i obrocie.end{defn} Oczywiście jeżeli przekręcimy półprostą BA na BC, a później półprostą BC na BA, to otrzymujemy obrót przenoszący półprostą BA na BA, czyli obrót o 0^{circ}. Stąd wynika dziwna równość [angle CBA = -angle ABC] w przeciwieństwie do zwykłych kątów, gdzie mamy $ ABC= CBA$. Zwykle przyjmuje się, że kręcimy przeciwnie do wskazówek zegara, czyli kąt $angle (XO,OY)=90^{circ}$ (OX, OY, to osie układu współrzędnych, $X=(0,1),Y=(1,0)$).\ item W zdaniu ,,miara kąta nie zmienia się w przesunięciu o wektor i obrocie'' chodzi o to, że jeżeli mamy przekształcenie J które jest obrotem lub przesunięciem o wektor, to mamy $angle (AB,BC)=angle (J(AB),J(BC))$, gdzie $J(AB)$ to półprosta otrzymana po przekształceniu półprostej AB. Zauważmy, że zwykła miara kąta nie zmienia się przy przesunięciu, obrocie i symetrii względem prostej. Inaczej jest z kątami skierowanymi. begin{lem} Kąt skierowany zmienia znak w symetrii względem prostej. end{lem} Dowód: Weźmy dowolny kąt $angle ABC$. Można założyć, że mamy policzyć jego miarę w symetrii względem dwusiecznej l tego kąta skierowanego (która jest zdefiniowana tak samo, jak dwusieczna zwykłego kąta), bowiem w innym przypadku możemy tak przesuwać i obracać kąt (nie zmieniając miary), że prosta, względem której robimy symetrię, stanie się tą dwusieczną.\ W symetrii względem prostej l półprosta BA przechodzi na BC, a BC przechodzi na BA, więc $angle ABC$ w tej symetrii przechodzi na $angle CBA$, bowiem obrót o $alpha$ przenosi BA na BC, więc po symetrii przenosi on BC na BA. Stąd kąt $angle ABC$ zmienia się w $angle CBA=-angle ABC$.\ Jeżeli S jest symetrią względem prostej, to przenosi ona kąt skierowany na kąt symetryczny do niego: $S(angle ABC)=angle S(A)S(B)S(C)$. Stąd wynika $angle S(A)S(B)S(C)=-angle ABC$, czyli [angle S(C)S(B)S(A)=angle ABC]\ item Można zrezygnować z warunku, że odpowiednie półproste przechodzą na siebie i rozważać kąty z dokładnością do 180^{circ}, ale wtedy obrót o 180^{circ} jest nie do odróżnienia od obrotu o 0^{circ}, a zwykle są to jednak dwa różne przeształcenia, więc textbf{nie} będziemy rezygnować z tego warunku.\ item W kątach skierowanych kąty wierzchołkowe i naprzemianległe (zgodnie skierowane) są równe, bowiem można odpowiednio obrócić i przesunąć. Mamy również zawsze [angle BAC+angle CAD=angle BAD] Dowód: obrót o $angle BAC$ przenosi półprostą AB na AC, a obrót o kąt $angle CAD$ przenosi półprostą AC na półprostą AD, stąd obrót o kąt $angle BAC+angle CAD$ przenosi AB na AD, czyli z definicji $angle BAC+angle CAD=angle BAD$ (było tutaj milczące założenie, że obrót wokół A o $alpha+beta$ to złożenie obrotu wokół A o $alpha$ i obrotu wokół A o $beta$).\ Możemy więc spokojnie dodawać kąty skierowane, czego raczej nie mogliśmy robić ze zwykłymi kątami (przypadek, gdy D leży wewnątrz kąta $angle BAC$). Ta równość jest główną przewagą kątów skierowanych nad zwykłymi. Możemy z niej wywnioskować, że $angle CBA = -angle ABC$, bowiem z definicji $angle BAB=0^{circ}$.\ item Suma kątów zgodnie skierowanych trójkąta $triangle ABC$ wynosi 180^{circ}, innymi słowy: [angle ABC+angle BCA+angle CAB=180^{circ}] textbf{Dowód}: Niech D będzie obrazem A w przesunięciu o wektor $vec{BC}$. Wtedy $angle ABC=angle DCX$, gdzie X leży daleeko na półprostej BC. Z równości kątów naprzemianległych otrzymujemy $angle CAB=angle ACD$, więc $$angle ABC+angle BCA+angle CAB=angle DCX+angle BCA+angle ACD=angle BCA+angle ACD+angle DCX=angle BCX=180^{circ}$$ Ostatnia równość wprost z definicji. item Najprościej jest myśleć o kątach skierowanych, jak o zwykłych kątach ze sztucznie dodanym zwrotem (kąty lewoskrętne i prawoskrętne) i sztucznie określonymi regułami: kąty o tym samym zwrocie dodajemy, a o przeciwnych odejmujemy. item begin{defn}Obrotem o kąt skierowany $alpha=angle (BA,AC)$ wokół A nazywamy obrót wokół A, który półprostą AB przenosi na półprostą AC i piszemy O_A^{alpha}. A nazywamy środkiem obrotu. Zauważmy, że jeżeli obrót nie jest o kąt 0^{circ}, to jedynym punktem, który po obrocie zostaje niezmieniony jest A.end{defn}   item begin{lem} Obrót O_A^{alpha} da się zapisać jako złożenie symetrii względem prostej BA z symetrią względem prostej AC (najpierw odbijamy względem BA) dla których jest $angle (BA, AC)=frac{alpha}{2}$, co zapisujemy jako $O_A^{alpha}=S_{AC}circ S_{BA}$. end{lem}   textbf{Dowód}: Weźmy dowolne proste AB i AC, takie, że kąt skierowany pomiędzy BA a AC to $frac{alpha}{2}$. Wtedy $angle BAC=frac{alpha}{2}$ lub $angle BAC=frac{alpha}{2}+180^{circ}$, tak czy inaczej $2angle BAC=alpha$.\ Weźmy dowolne $Xneq A$. Niech X' oznacza X odbity w symetrii względem BA, a X'' oznacza X' odbity w symetrii względem AC. Wtedy $angle XAB=angle BAX'$ i $angle X'AC=angle CAX''$, stąd $angle XAX''=angle XAB+angle BAX'+angle X'AC+angle CAX''=2(angle BAX'+angle X'AC)=2angle BAC=alpha$.\ Zauważmy, że korzystaliśmy w tych równościach z $angle BAC+angle CAD=angle BAD$ i $angle S(C)S(B)S(A)=angle ABC$ i dzięki temu nie musieliśmy rozważać niezliczonych przypadków. item begin{thm} Złożenie obrotów O_A^{alpha} i O_B^{beta} (najpierw obrót wokół A), czyli $O_B^{beta}circ O_A^{alpha}$ (składamy od prawej) jest   begin{enumerate} item Obrotem o kąt $alpha + beta$ wokół X takiego, że $angle XAB=frac{alpha}{2}$ i $angle XBA=-frac{beta}{2}$ jeśli $alpha + betaneq 0$, item Przesunięciem płaszczyzny o wektor $2vec{AB}$ jeżeli $alpha + beta$ jest wielokrotnością 360^{circ}, czyli $alpha+beta=0$ (mierzymy z dokładnością do 360^{circ}).   end{enumerate} end{thm} textbf{Dowód}: Niech XA będzie taką prostą, że $angle XAB=frac{alpha}{2}$ i niech BY będzie taką prostą, że $angle ABY=frac{beta}{2}$ (punkty X,Y leżą gdzieś daleeko i służą tylko do ustalania półprostych). Z lematu $O_A^{alpha}=S_{AB}circ S_{XA}$ i $O_B^{beta}=S_{BY}circ S_{AB}$, więc $O_B^{beta}circ O_A^{alpha}=S_{BY}circ S_{AB}circ S_{AB}circ S_{XA}$. Oczywiście dwukrotna symetria względem prostej AB to to samo co identyczność, więc [O_B^{beta}circ O_A^{alpha}=S_{BY}circ S_{XA}] Rozważmy 2 przypadki: begin{enumerate} item Proste AX i BY są równoległe. Jest $angle XAB=angle YBC$, gdzie C leży na prostej BA po innej stronie B niż A, więc $frac{beta}{2}+frac{alpha}{2}=angle ABY+angle XAB=angle ABY+angle YBC=angle ABC=180^{circ}$, więc $beta+alpha=2cdot 180^{circ}=360^{circ}=0^{circ}$.\ Niech D będzie dowolnym punktem płaszczyzny, niech D' oznacza jego obraz w symetrii względem AX, a D'' obraz D' w symetrii względem BY, D_1 oznacza rzut prostopadły D na AX, a D_2 rzut prostopadły D na BY. Skoro $AX||BY$, to punkty D,D_1,D_2,D',D'' leżą na jednej prostej prostopadłej do AX.\ Mamy, z własności symetrii $vec{DD_1}=vec{D_1D'}$ i $vec{D'D_2}=vec{D_2D''}$, ponadto, skoro wszystko leży na jednej linii, to $vec{DD''}=vec{DD_1}+vec{D_1D'}+vec{D'D_2}+vec{D_2D''}=2(vec{D_1D'}+vec{D'D_2})=2vec{D_1D_2}=2vec{AB}$. item Jeżeli AX i BY nie są równoległe to $alpha+beta neq 0$ (rozumowanie analogiczne jak wyżej). Niech C oznacza punkt przecięcia AX i BY. Mamy   [O_B^{beta}circ O_A^{alpha}=S_{BY}circ S_{XA}=O^{2angle(XC,CY)}_C] Popatrzmy na trójkąt $triangle ABC$. Kąt $angle CAB$ to $frac{alpha}{2}$ lub $frac{alpha}{2}-180^{circ}$, w zależności od tego, po której stronie prostej AB leży C i X (sprawdź na rysunku), ale zawsze zachodzi $2angle CAB=alpha$. Analogicznie $angle ABC$ może być równy $frac{beta}{2}$ lub $frac{beta}{2}+180^{circ}$, tak czy owak $2angle ABC=beta$.\ Skoro $angle ABC+angle CAB+angle BCA=180^{circ}$, $alpha+beta+2angle BCA=2angle ABC+2angle CAB+2angle BCA=0^{circ}$, więc $2angle BCA=-(alpha+beta)$, czyli $2angle ACB=alpha+beta$.   end{enumerate}   item begin{defn} Powiemy, że 2 figury są zgodnie zorientowane, jeżeli są one podobne: $A_1A_2cdots A_n simeq B_1B_2cdots B_n$ i odpowiednie kąty textbf{skierowane} są równe: [angle A_1A_2A_3=angle B_1B_2B_3,angle A_2A_3A_4=angle B_2B_3B_4, cdots, angle A_{n-1}A_nA_1=angle B_{n-1}B_nB_1, angle B_nB_1B_2=angle A_nA_1A_2]end{defn} item Ten tekst powstał w dużej mierze w oparciu o artykuł prof. Piotra Grzeszczuka z Delty 10/04 dostępnego pod emph{www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta1004/grzeszczuk.pdf}. end{enumerate} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC i jest $PA=3$, $PB=4$, $PC=5$. P' jest takie, że trójkąt $triangle APP'$ jest zgodnie zorientowany z $triangle ABC$. Udowodnij, że $ PP'C=90^{circ}$. item Na płaszczyźnie dane są 2 trójkąty równoboczne zgodnie zorientowane ABC i CDE (mające wspólny wierzchołek C) oraz punkty F i G, takie, że $AD=AF$, $BE=BG$ i $angle DAF=angle EBG$ (kąty skierowane!). Wykazać, że trójkąt CFG jest równoboczny. item Na ścianach trójkąta ABC budujemy, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne. Udowodnij, że środki ciężkości tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny. item Dane są rozłączne oprócz punktu C, zgodnie zorientowane kwadraty $ACMN$ i $KLCB$ o środkach P i R odpowiednio. Niech Q, S będą środkami odcinków AB, ML. Wykazać, że $PQRS$ jest kwadratem. item Dane są punkty A,B,C,D tworzące czworokąt wypukły. Punkt P jest taki, że $|AP|=|BP|$, $|CP|=|DP|$ oraz $ APB= CPD=90^{circ}$. Udowodnij, że $|AC|=|BD|$ i $ACperp BD$. Przy okazji, jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, żeby przekątne w czworokącie przecinały się pod kątem prostym? item Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty prostokątne równoramienne ABP, BCQ, CDR, DAS, z kątami prostymi przy P,Q,R,S. Udowodnij, że $PRperp QS$. item Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i jest taki, że ADP i BCP są równoboczne. Na bokach AB i CD zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne ABL i CDM. Udowodnić, że P jest środkiem odcinka LM. item Na zewnątrz boków AB i BC trójkąta ABC zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne ABP i BCQ, z kątami prostymi przy wierzchołkach P i Q. Udowodnić, że jeżeli M - środek boku AC, to trójkąt MPQ jest też równoramienny prostokątny. item textbf{58 OM, 2 etap, zadanie 2.} Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC=CD$, $DE=EA$, $ BCD= DEA = 90deg$. Udowodnić, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów znając miarę $alpha$ kąta ACE i miarę $beta$ kąta BEC. item textbf{57 OM, 2 etap, zadanie 5.} Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez A,C przecina okrąg o_2 przechodzący przez B,C w różnych punktach C,D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera C. Dowieść, że $CDperp PQ$. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt %

Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} renewcommand{thethm}{} defrozw{\ textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} title{Przekręty płaszczyzny} date{} maketitle paragraph{Teoria} begin{enumerate} item begin{defn} Kątem skierowanym $angle ABC=angle (AB,BC)$ będziemy nazywać miarę kąta o jaki trzeba przekręcić płaszczyznę wokół B tak, by textbf{półprostą} BA przeszła na półprostą BC. Taki kąt jest dokładnie jeden z dokładnością do 360^{circ} i z tą dokładnością będziemy mierzyć. Ponadto, dla uzupełnienia definicji miary kąta skierowanego, zakładamy, że miara ta nie zmienia się przy przesunięciu o wektor i obrocie.end{defn} Oczywiście jeżeli przekręcimy półprostą BA na BC, a później półprostą BC na BA, to otrzymujemy obrót przenoszący półprostą BA na BA, czyli obrót o 0^{circ}. Stąd wynika dziwna równość [angle CBA = -angle ABC] w przeciwieństwie do zwykłych kątów, gdzie mamy $ ABC= CBA$. Zwykle przyjmuje się, że kręcimy przeciwnie do wskazówek zegara, czyli kąt $angle (XO,OY)=90^{circ}$ (OX, OY, to osie układu współrzędnych, $X=(0,1),Y=(1,0)$).\ item W zdaniu ,,miara kąta nie zmienia się w przesunięciu o wektor i obrocie'' chodzi o to, że jeżeli mamy przekształcenie J które jest obrotem lub przesunięciem o wektor, to mamy $angle (AB,BC)=angle (J(AB),J(BC))$, gdzie $J(AB)$ to półprosta otrzymana po przekształceniu półprostej AB. Zauważmy, że zwykła miara kąta nie zmienia się przy przesunięciu, obrocie i symetrii względem prostej. Inaczej jest z kątami skierowanymi. begin{lem} Kąt skierowany zmienia znak w symetrii względem prostej. end{lem} Dowód: Weźmy dowolny kąt $angle ABC$. Można założyć, że mamy policzyć jego miarę w symetrii względem dwusiecznej l tego kąta skierowanego (która jest zdefiniowana tak samo, jak dwusieczna zwykłego kąta), bowiem w innym przypadku możemy tak przesuwać i obracać kąt (nie zmieniając miary), że prosta, względem której robimy symetrię, stanie się tą dwusieczną.\ W symetrii względem prostej l półprosta BA przechodzi na BC, a BC przechodzi na BA, więc $angle ABC$ w tej symetrii przechodzi na $angle CBA$, bowiem obrót o $alpha$ przenosi BA na BC, więc po symetrii przenosi on BC na BA. Stąd kąt $angle ABC$ zmienia się w $angle CBA=-angle ABC$.\ Jeżeli S jest symetrią względem prostej, to przenosi ona kąt skierowany na kąt symetryczny do niego: $S(angle ABC)=angle S(A)S(B)S(C)$. Stąd wynika $angle S(A)S(B)S(C)=-angle ABC$, czyli [angle S(C)S(B)S(A)=angle ABC]\ item Można zrezygnować z warunku, że odpowiednie półproste przechodzą na siebie i rozważać kąty z dokładnością do 180^{circ}, ale wtedy obrót o 180^{circ} jest nie do odróżnienia od obrotu o 0^{circ}, a zwykle są to jednak dwa różne przeształcenia, więc textbf{nie} będziemy rezygnować z tego warunku.\ item W kątach skierowanych kąty wierzchołkowe i naprzemianległe (zgodnie skierowane) są równe, bowiem można odpowiednio obrócić i przesunąć. Mamy również zawsze [angle BAC+angle CAD=angle BAD] Dowód: obrót o $angle BAC$ przenosi półprostą AB na AC, a obrót o kąt $angle CAD$ przenosi półprostą AC na półprostą AD, stąd obrót o kąt $angle BAC+angle CAD$ przenosi AB na AD, czyli z definicji $angle BAC+angle CAD=angle BAD$ (było tutaj milczące założenie, że obrót wokół A o $alpha+beta$ to złożenie obrotu wokół A o $alpha$ i obrotu wokół A o $beta$).\ Możemy więc spokojnie dodawać kąty skierowane, czego raczej nie mogliśmy robić ze zwykłymi kątami (przypadek, gdy D leży wewnątrz kąta $angle BAC$). Ta równość jest główną przewagą kątów skierowanych nad zwykłymi. Możemy z niej wywnioskować, że $angle CBA = -angle ABC$, bowiem z definicji $angle BAB=0^{circ}$.\   item Suma kątów zgodnie skierowanych trójkąta $triangle ABC$ wynosi 180^{circ}, innymi słowy: [angle ABC+angle BCA+angle CAB=180^{circ}] textbf{Dowód}: Niech D będzie obrazem A w przesunięciu o wektor $vec{BC}$. Wtedy $angle ABC=angle DCX$, gdzie X leży daleeko na półprostej BC. Z równości kątów naprzemianległych otrzymujemy $angle CAB=angle ACD$, więc $$angle ABC+angle BCA+angle CAB=angle DCX+angle BCA+angle ACD=angle BCA+angle ACD+angle DCX=angle BCX=180^{circ}$$ Ostatnia równość wprost z definicji.   item Najprościej jest myśleć o kątach skierowanych, jak o zwykłych kątach ze sztucznie dodanym zwrotem (kąty lewoskrętne i prawoskrętne) i sztucznie określonymi regułami: kąty o tym samym zwrocie dodajemy, a o przeciwnych odejmujemy.   item begin{defn}Obrotem o kąt skierowany $alpha=angle (BA,AC)$ wokół A nazywamy obrót wokół A, który półprostą AB przenosi na półprostą AC i piszemy O_A^{alpha}. A nazywamy środkiem obrotu. Zauważmy, że jeżeli obrót nie jest o kąt 0^{circ}, to jedynym punktem, który po obrocie zostaje niezmieniony jest A.end{defn}   item begin{lem} Obrót O_A^{alpha} da się zapisać jako złożenie symetrii względem prostej BA z symetrią względem prostej AC (najpierw odbijamy względem BA) dla których jest $angle (BA, AC)=frac{alpha}{2}$, co zapisujemy jako $O_A^{alpha}=S_{AC}circ S_{BA}$. end{lem}   textbf{Dowód}: Weźmy dowolne proste AB i AC, takie, że kąt skierowany pomiędzy BA a AC to $frac{alpha}{2}$. Wtedy $angle BAC=frac{alpha}{2}$ lub $angle BAC=frac{alpha}{2}+180^{circ}$, tak czy inaczej $2angle BAC=alpha$.\ Weźmy dowolne $Xneq A$. Niech X' oznacza X odbity w symetrii względem BA, a X'' oznacza X' odbity w symetrii względem AC. Wtedy $angle XAB=angle BAX'$ i $angle X'AC=angle CAX''$, stąd $angle XAX''=angle XAB+angle BAX'+angle X'AC+angle CAX''=2(angle BAX'+angle X'AC)=2angle BAC=alpha$.\ Zauważmy, że korzystaliśmy w tych równościach z $angle BAC+angle CAD=angle BAD$ i $angle S(C)S(B)S(A)=angle ABC$ i dzięki temu nie musieliśmy rozważać niezliczonych przypadków.   item begin{thm} Złożenie obrotów O_A^{alpha} i O_B^{beta} (najpierw obrót wokół A), czyli $O_B^{beta}circ O_A^{alpha}$ (składamy od prawej) jest   begin{enumerate} item Obrotem o kąt $alpha + beta$ wokół X takiego, że $angle XAB=frac{alpha}{2}$ i $angle XBA=-frac{beta}{2}$ jeśli $alpha + betaneq 0$, item Przesunięciem płaszczyzny o wektor $2vec{AB}$ jeżeli $alpha + beta$ jest wielokrotnością 360^{circ}, czyli $alpha+beta=0$ (mierzymy z dokładnością do 360^{circ}).   end{enumerate} end{thm} textbf{Dowód}: Niech XA będzie taką prostą, że $angle XAB=frac{alpha}{2}$ i niech BY będzie taką prostą, że $angle ABY=frac{beta}{2}$ (punkty X,Y leżą gdzieś daleeko i służą tylko do ustalania półprostych). Z lematu $O_A^{alpha}=S_{AB}circ S_{XA}$ i $O_B^{beta}=S_{BY}circ S_{AB}$, więc $O_B^{beta}circ O_A^{alpha}=S_{BY}circ S_{AB}circ S_{AB}circ S_{XA}$. Oczywiście dwukrotna symetria względem prostej AB to to samo co identyczność, więc [O_B^{beta}circ O_A^{alpha}=S_{BY}circ S_{XA}] Rozważmy 2 przypadki: begin{enumerate} item Proste AX i BY są równoległe. Jest $angle XAB=angle YBC$, gdzie C leży na prostej BA po innej stronie B niż A, więc $frac{beta}{2}+frac{alpha}{2}=angle ABY+angle XAB=angle ABY+angle YBC=angle ABC=180^{circ}$, więc $beta+alpha=2cdot 180^{circ}=360^{circ}=0^{circ}$.\ Niech D będzie dowolnym punktem płaszczyzny, niech D' oznacza jego obraz w symetrii względem AX, a D'' obraz D' w symetrii względem BY, D_1 oznacza rzut prostopadły D na AX, a D_2 rzut prostopadły D na BY. Skoro $AX||BY$, to punkty D,D_1,D_2,D',D'' leżą na jednej prostej prostopadłej do AX.\ Mamy, z własności symetrii $vec{DD_1}=vec{D_1D'}$ i $vec{D'D_2}=vec{D_2D''}$, ponadto, skoro wszystko leży na jednej linii, to $vec{DD''}=vec{DD_1}+vec{D_1D'}+vec{D'D_2}+vec{D_2D''}=2(vec{D_1D'}+vec{D'D_2})=2vec{ D_1D_2}=2vec{AB}$. item Jeżeli AX i BY nie są równoległe to $alpha+beta neq 0$ (rozumowanie analogiczne jak wyżej). Niech C oznacza punkt przecięcia AX i BY. Mamy [O_B^{beta}circ O_A^{alpha}=S_{BY}circ S_{XA}=O^{2angle(XC,CY)}_C] Popatrzmy na trójkąt $triangle ABC$. Kąt $angle CAB$ to $frac{alpha}{2}$ lub $frac{alpha}{2}-180^{circ}$, w zależności od tego, po której stronie prostej AB leży C i X (sprawdź na rysunku), ale zawsze zachodzi $2angle CAB=alpha$. Analogicznie $angle ABC$ może być równy $frac{beta}{2}$ lub $frac{beta}{2}+180^{circ}$, tak czy owak $2angle ABC=beta$.\ Skoro $angle ABC+angle CAB+angle BCA=180^{circ}$, $alpha+beta+2angle BCA=2angle ABC+2angle CAB+2angle BCA=0^{circ}$, więc $2angle BCA=-(alpha+beta)$, czyli $2angle ACB=alpha+beta$. end{enumerate} item begin{defn} Powiemy, że 2 figury są zgodnie zorientowane, jeżeli są one podobne: $A_1A_2cdots A_n simeq B_1B_2cdots B_n$ i odpowiednie kąty textbf{skierowane} są równe: [angle A_1A_2A_3=angle B_1B_2B_3,angle A_2A_3A_4=angle B_2B_3B_4, cdots, angle A_{n-1}A_nA_1=angle B_{n-1}B_nB_1, angle B_nB_1B_2=angle A_nA_1A_2]end{defn} item Ten tekst powstał w dużej mierze w oparciu o artykuł prof. Piotra Grzeszczuka z Delty 10/04 dostępnego pod emph{www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta1004/grzeszczuk.pdf}. end{enumerate} %--- paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC i jest $PA=3$, $PB=4$, $PC=5$. P' jest takie, że trójkąt $triangle APP'$ jest zgodnie zorientowany z $triangle ABC$. Udowodnij, że $ PP'C=90^{circ}$. rozw Rozważmy obrót O_1 wokół A, przenoszący B na C (czyli obrót o $pm 60^{circ}$, zależnie od orientacji $triangle ABC$). Skoro $triangle ABC$ i $triangle APP'$ są zgodnie zorientowane, to O_1 przenosi P na P' (jeżeli nie wierzysz, to rozważ 2 przypadki - obrót o 60^{circ} i -60^{circ}).\ Obrót ten przenosi B na C i P na P', więc $|CP'|=|BP|=4$. Ponadto, $|PP'|=|AP|=3$, bo $triangle APP'$ jest równoboczny. Wiemy też, że $|CP|=5$. Trójkąt $PP'C$ ma boki $3,4,5$, jest więc, z tw. odwrotnego do Pitagorasa, prostokątny, przy czym kąt prosty jest między bokami długości 3 i 4, czyli w P'.\ item Na płaszczyźnie dane są 2 trójkąty równoboczne zgodnie zorientowane ABC i CDE (mające wspólny wierzchołek C) oraz punkty F i G, takie, że $AD=AF$, $BE=BG$ i $angle DAF=angle EBG$ (kąty skierowane!). Wykazać, że trójkąt CFG jest równoboczny. rozw Niech O_1 oznacza obrót wokół C, przenoszący D na E (jest to obrót o $angle DCE=pm 60^{circ}$). Skoro $triangle ABC$ i $triangle CDE$ są zgodnie zorientowane, to O_1 przenosi A na B, więc przenosi on AD na BE, czyli [|AD|=|BE|] Obrót O_1 przenosi F na punkt F', taki, że, $|BF'|=|O_1(A)O_1(F)|=|AF|=|AD|=|BE|=|BG|$ i $angle EBF' = angle O_1(D)O_1(A)O_1(F)=angle DAF = angle EBG$. Drugie od końca przejście wynika z tego, że obrót zachowuje kąty. Z równości [|BF'|=|BG| hbox{ i }angle EBF'=angle EBG] otrzymujemy $F'=G$. Tak więc obrót O_1 wokół C przenosi F na G, więc $|CF|=|CG|$ i $angle FCG=pm 60^{circ}$, czyli $FCG=60^{circ}$ (zwykły kąt). Trójkąt $triangle CFG$ jest równoramienny o kącie 60^{circ} między ramionami, jest więc równoboczny.\ Faktu, że w równości $angle DAF = angle EBG$ mamy kąty skierowane, użyliśmy do udowodnienia, że $F'=G$. Gdyby nie było tu kątów skierowanych, a zwykłe, to ten dowód i teza byłyby fałszywe. item Na bokach trójkąta ABC budujemy, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne. Udowodnij, że środki ciężkości tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny. rozw Bez straty ogólności możemy założyć, że obrót wokół środka ciężkości trójkąta zbudowanego na boku

XY o 120^{circ} przenosi X na Y, gdzie $(X,Y)=(A,B),(B,C),(C,A)$ (czyli odp. obroty przerzucają A na B, B, na C, C na A, żeby tak było, wystarczy ew. pozamieniać nazwy punktów A,B,C). Niech K,L,M oznaczają środki ciężkości trójkątów zbudowanych na bokach AB,BC,CA, odpowiednio. Z tego, co powiedziałem wyżej, wynika, że [O_K^{120deg}(A)=B,O_L^{120deg}(B)=C,O_M^{120deg}(C)=A] Z tych równości wynika, że [O_M^{120deg}circ O_L^{120deg}circ O_K^{120deg}(A)=O_M^{120deg}circ O_L^{120deg}(B)=O_M^{120deg}(C)=A] textbf{dokończenie 1}: Twierdzenie o składaniu obrotów mówi, nam, że złożenie obrotów $O_L^{120deg}circ O_K^{120deg}$ jest obrotem wokół pewnego punktu X o $240deg$. Co więcej, wiemy, że $O_X^{240deg}=O_L^{120deg}circ O_K^{120deg}(A)=C$, tak więc musi zachodzić $|XA|=|XC|$ i $angle AXC=240deg$, czyli $angle CXA=-240deg=120deg$. Jedynym punktem spełniającym te równania jest punkt M, a więc $X=M$. Dalej korzystając z tego twierdzenia otrzymujemy [angle MKL=60deg, angle MLK=-60deg] Skoro kąty wewnętrzne w trójkącie $triangle MLK$ są mniejsze od $180deg$, to $MKL=MLK=60deg$, a więc trójkąt $triangle MKL$ jest równoboczny.\ textbf{dokończenie 2:} Zamiast szukać X z definicji, możemy pójść dalej i stwierdzić, że z tw. o składaniu obrótow, przekształcenie $O_M^{120deg}circ O_L^{120deg}circ O_K^{120deg}$ jest przesunięciem o wektor (bo $120deg+120deg+120deg=0deg$), a skoro zachowuje ono na miejscu punkt A, to musi być identycznością (przesunięciem od wektor zerowy), gdyż przesunięcie o wektor niezerowy nie zachowuje żadnego punktu. Mamy więc [O_M^{120deg}circ O_L^{120deg}circ O_K^{120deg}=operatorname{id}] czyli [O_M^{-120deg}circ O_M^{120deg}circ O_L^{120deg}circ O_K^{120deg} = O_M^{-120deg}] [O_L^{120deg}circ O_K^{120deg} = O_M^{-120deg}] Stąd bezpośrednio wnioskujemy, że X, określony jak w dokończeniu 1. jest równy M. Dalsze rozumowanie jak w dokończeniu 1. item Dane są rozłączne oprócz punktu C, zgodnie zorientowane kwadraty $ACMN$ i $KLCB$ o środkach P i R odpowiednio. Niech Q, S będą środkami odcinków AB, ML. Wykazać, że $PQRS$ jest kwadratem. rozw Niech O_1 będzie obrotem o środku w P przekształcającym A na C, jest to obrót o $pm 90deg$. Wtedy obrót O_2 o środku w R o tę samą ilość stopni co O_1 przekształca C na B, gdyż $ACMN$ i $KLCB$ są zgodnie zorientowane.\ Rozważmy złożenie: [O_2circ O_1] Jest to obrót o $pm 90deg=pm 180deg=180deg$, gdyż mierzymy z dokładnością do $360deg$, wokół pewnego X. Ponadto obrót ten przekształca A w C, czyli X jest środkiem odcinka AC, a więc $X=S$. Z tw. o złożeniu obrotów [angle SPR=45deg hbox{ i } angle SRP=-45deg] Skoro są to kąty w trójkącie, czyli ich miary są mniejsze od $180deg$, to [SPR=SRP=45deg hbox{(,,zwykłe'' kąty)}] Trójkąt PSR jest więc równoramienny i prostokątny. Rozpatrując złożenie obrotów wokół P i R przekształcających M na C i C na L, udowadniamy, że PQR jest prostokątny równoramienny, a więc $PQRS$ jest kwadratem. item Dane są punkty A,B,C,D tworzące czworokąt wypukły. Punkt P jest taki, że $|AP|=|BP|$, $|CP|=|DP|$ oraz $ APB= CPD=90^{circ}$. Udowodnij, że $|AC|=|BD|$ i $ACperp BD$. Przy okazji, jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, żeby przekątne w czworokącie przecinały się pod kątem prostym? rozw Skoro $ABCD$ jest wypukły (ważna jest tutaj kolejność wierzchołków), to kąty $angle APB$ i $angle CPD$ są zgodnie zorientowane. Obrót O wokół P, przekształcający A na B przekształca też AC na BD, więc $|AC|=|BD|$. Obrót O jest obrotem o $pm 90deg$, więc kąt skierowany między AC a BD wynosi też $pm 90deg$, zwykły kąt wynosi więc $90deg$, czyli $ACperp BD$.\ Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby przekątne w czworokącie wypukłym przecinały się pod kątem prostym jest: sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe, inaczej, $|AB|^2+|CD|^2=|AD|^2+|BC|^2$. item Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty prostokątne równoramienne ABP, BCQ, CDR, DAS, z kątami prostymi przy P,Q,R,S. Udowodnij, że $PRperp QS$. rozw Niech O_1 będzie obrotem wokół P przekształcającym A na B, a O_2 obrotem wokół Q przekształcającym B na C. Obroty te są zgodnie zorientowane, więc rozumujemy jak w zadaniu 4. i stwierdzamy, że [O_2circ O_1=O^{180deg}_M] gdzie M jest środkiem AC. Stąd, rozumując jak dalej w zadaniu 4.: [|MP|=|MQ| hbox{ i } PMQ=90deg] Analogicznie stwierdzamy, że [|MP|=|MR| hbox{ i } RMS=90deg] Pozostaje krótko uzasadnić, że $PQRS$ jest wypukły (wskazówka: można rozważyć podział płaszczyzny prostymi zawierającymi boki $ABCD$) i skorzystać z poprzedniego zadania. item Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i jest taki, że ADP i BCP są równoboczne. Na bokach AB i CD zbudowano, po zewnętrznej stronie trójkąty równoboczne ABL i CDM. Udowodnić, że P jest środkiem odcinka LM. rozw Rozważmy złożenie obrotu O_1 wokół A, przekształcającego L na B, O_2 wokół P przekształcającego B na C, O_3 wokół D, przekształcającego C na M. Te 3 obroty są zgodnie zorientowane (zrób rysunek i popatrz dlaczego) i są to obroty o $pm 60deg$. Złożenie $O_3circ O_2circ O_1$ jest więc obrotem o $pm 3cdot 60deg=180deg$, przenoszącym L na M, jest więc obrotem wokół środka odcinka LM.\ Złożenie obrotów wokół A i P jest obrotem o $pm 120deg$ wokół punktu X, takiego, że [angle XAP=pm 30deg hbox{ i } angle XPA=mp 30deg] Punkt X jest więc (zrób rys. i patrz rys.) punktem symetrycznym do środka trójkąta APD względem prostej AP.\ Popatrzmy teraz na złożenie obrotów o $pm 120deg$ wokół X i o $pm 60deg$ wokół D, jak na obrót o $180deg$ wokół Y. Punkt Y musi spełniać [angle YXD=pm 60deg hbox{ i } angle YDX=mp 30deg] Zauważmy, że punkt P spełnia obie te zależności (a punkt je spełniający jest tylko jeden), jest więc $P=Y$, co kończy dowód, bowiem $O_Y^{180deg}(L)=M$. item Na zewnątrz boków AB i BC trójkąta ABC zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne ABP i BCQ, z kątami prostymi przy wierzchołkach P i Q. Udowodnić, że jeżeli M - środek boku AC, to trójkąt MPQ jest też równoramienny prostokątny. rozw Złożenie obrotu wokół P, przekształcającego A na B i obrotu wokół Q, przekształcającego B na C jest obrotem o $180deg$, przekształcającym A na C, jest więc obrotem wokół M, czyli $MPQ=MQP=45deg$, trójkąt MPQ jest więc prostokątny i równoramienny (szczegóły jak w zadaniu 4.). item textbf{58 OM, 2 etap, zadanie 2.} Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC=CD$, $DE=EA$, $ BCD= DEA = 90deg$. Udowodnić, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów znając miarę $alpha$ kąta ACE i miarę $beta$ kąta BEC. rozw Jeżeli potraktujemy pięciokąt z zadania jako trójkąt ABD z doczepionymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi, to, stosując poprzednie zadanie, otrzymujemy ECM - prostokątny równoramienny (kąt prosty przy M), gdzie M - środek AB.\ Obrót o $180deg$ wokół M przenosi A na B i da się rozpisać jako złożenie symetrii względem MC z symetrią względem ME, gdyż $CMperp ME$ (patrz lemat w części teoretycznej), czyli [S_{ME}circ S_{CM}(A)=B] Niech $K=S_{CM}(A)$. Wtedy $|KC|=|CA|$ i $S_{ME}(K)=B$, więc $|KE|=|BE|$. Trójkąt EKC ma więc długości boków AC,CE,EB. Pozostaje wyliczyć jego kąty. Jest $MEB = MEC - BEC=45-alpha$, więc $KEC=2(45-alpha)+alpha=90-alpha$. Analogicznie $KCE=90-beta$, więc $EKC=alpha+beta$. Możemy tak swobodnie wszystko dodawać, mimo, że są to kąty zwykłe, bo pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły i to narzuca odpowiednie położenie punktów na płaszczyźnie (zrób rys. i patrz rys.). item textbf{57 OM, 2 etap, zadanie 5.} Punkt

C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez A,C przecina okrąg o_2 przechodzący przez B,C w różnych punktach C,D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera C. Dowieść, że $CDperp PQ$. rozw Kąty $angle BQD$ i $angle DPA$ są zgodnie zorientowane. Ponadto (w zwykłych kątach) $BQD=180deg - BCD$ i $DPA=180deg-ACD$ (punkty P,Q,D leżą z tej samej strony AB), więc $BQD+DPA=180deg$. Skoro kąty te są zgodnie zorientowane to [angle BQD+angle DPA=180deg] Obrót o $angle BQD$ wokół Q przekształca B na D, a obrót o $angle DPA$ wokół P przekształca D na A, więc złożenie $O_P^{angle DPA}circ O_Q^{angle BQD}$ przekształca B na A, a jest ono obrotem o $angle BQD+angle DPA=180deg$ wokół pewnego X, a więc X musi być środkiem boku AB, czyli $X=C$.\ Z tw. o składaniu obrotów otrzymujemy więc [angle CPQ=frac{angle DPA}{2}] ponieważ $frac{DPA}{2}$ jest kątem o mierze mniejszej niż $180deg$ (przechodząc od kątów skierowanych do zwykłych musimy pamiętać, o tym, że mogłoby, teoretycznie, być $CPQ=pm 180deg + frac{DPA}{2}$, bo liczymy z dokładnością do $360deg$ miarę DPA), to i [CPQ = frac{DPA}{2}] Z drugiej strony, czego zresztą milcząco użyłem przy definiowaniu obrotów, jest $|PA|=|PD|$, więc $triangle DPA$ jest równoramienny, a więc [ADP=frac{180deg-DPA}{2}=90deg-frac{DPA}{2}=90-CPQ] Ponieważ wszystko leży tak jak powinno :P, w szczególności półprosta CD przecina PQ, to jeżeli oznaczymy punkt przecięcia CD z PQ jako E, to kąty w trójkącie CEP spełniają $PCE=90deg-CPE$, więc [CEP=90deg] To kończy dowód.   end{enumerate} end{document}