Wpisany przez Joachim Jelisiejew
niedziela, 07 lutego 2010 17:36 -

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} defVrule{smash{vrule height7pt depthbaselineskip}} defVarule{smash{vrule height7pt depth3pt}} defHrule #1{Squeezemultispan#1hrulefill} defCompressMatrices{ifmmode defquad{hskip.5emrelax}fi} defSqueeze{noalign{vskip-.5baselineskip}} defrk{operatorname {rank}} deflin{operatorname {lin}} defdim{operatorname{dim}} defker{operatorname{ker}} defdet{operatorname{det}} defim{operatorname{im}} defid{operatorname{id}} defRe{operatorname{Re}} defIm{operatorname{Im}} defi{operatorname{i}} defdist{operatorname{dist}} defdiag{operatorname{diag}} defspec{operatorname{spec}} defAbs #1{leftvert #1rightvert} defNorm #1{leftVert #1rightVert} defcc #1{overline{#1}} defip#1#2{langle #1,#2 rangle} defbf#1{textbf{#1}} defmattwo#1#2#3#4{left[begin{array}{c c}#1 & #2\ #3 & #4\end{array}right]} defmattree#1#2#3#4#5#6#7#8#9{left[begin{array}{c c c}#1 & #2 & #3\ #4 & #5 & #6\ #7 & #8 & #9\end{array}right]} begin{document} defrozw{\ textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} title{Kółko 23.04 - Trochę zespolonych} date{} maketitle paragraph{Ściągawka z teorii} begin{enumerate} item emph{Liczba zespolona} to liczba postaci $$z = a + bi$$ gdzie a,b rzeczywiste, a i to jednostka urojona, spełniająca $i^2 = -1$. Liczbę a nazywamy emph{częścią rzeczywistą} z i oznaczamy $Re z$, liczbę b nazywamy emph{częścią urojoną} z i oznaczamy $Im z$ (oznaczenia od ang. Real and Imaginary). item Mówimy, że liczba zespolona jest emph{rzeczywista}, jeżeli $b=0$ a emph{czysta}, albo emph{urojona}, jeśli $a=0$. item Liczby zespolone możemy określić działania: $$(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i$$ $$-(a+bi) = -a - bi$$ $$(a+bi)(c+di) = ac+adi +bci+ bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$ $$1/{a+bi} = frac{a-bi}{a^2 + b^2} = frac{a}{a^2 + b^2} -frac{b}{a^2 + b^2}i$$ Mnożenie jest przemienne i w ogóle wszystko jest normalne :P item Dla $z = a + bi$ liczbę $$a - bi$$ nazywamy emph{sprzężeniem} z i oznaczamy $cc{z}$. Jest $$cc{apm b} = cc{a} pm cc{b}, cc{ab}=cc{a}cc{b},   cc{1/a} = 1/cc{a}$$ item Liczbę rzeczywistą (!) $sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy emph{modułem} liczby z i oznaczamy $|z|$ (jest to odpowiednik wartości bezwzględnej), liczba $cc{z}$ ma taki sam moduł: $a^2 +b^2 = a^2 + (-b)^2$. Ponadto zachodzi $$zcc{z} = |z|^2$$ item Oczywiście $a+bi = c+di$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=c$ i $b=d$. item (Interpretacja geometryczna) Liczbę zespoloną $a+bi$ możemy utożsamiać z punktem płaszczyzny (a,b), łatwo wtedy widać, że $|z|$ jest odległością od 0 tej liczby. Niech $alpha$ będzie kątem pomiędzy osią OX o prostą przechodzącą przez $(0,0)$ i (x,y). Wtedy $$z = |z|(cos alpha + isinalpha)$$ end{enumerate}   paragraph{Zespolone w geometrii} begin{enumerate} item Udowodnij, że $|z|=0 Leftrightarrow z=0$. item Znaleźć wszystkie liczby zespolone z takie, że $z=cc{z}$ i wszystkie takie, że $z=-cc{z}$. item Stwierdzić, jaką figurę opisuje równanie $|z-r| = s$, dla r,s ustalonych, s rzeczywistego dodatniego. item Zinterpretować pomnożenie 2 liczb o module 1 wykorzystując interpretację geometryczną liczb zespolonych. item * Udowodnić, że gdy różne liczby zespolone u,v,w,z potraktować jako punkty płaszczyzny, to odcinki u,v i w,z są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $$(u-v):(w-z) hbox{ jest rzeczywiste }$$ a prostopadłe wtedy tylko wtedy, gdy $$(u-v):(w-z) hbox{ jest urojone }$$ item Stosując poprzednie zadanie wywieść warunki na to, że różne liczby u,v,w są współliniowe (jako punkty płaszczyzny). item Rozłóż wielomian z poprzedniego koła ($x^4 + 1$) na czynniki stopnia 1, a następnie na czynniki rzeczywiste stopnia 2. end{enumerate}   end{document}