



[&nbsp;](#)  
[Zadania PDF.](#)

## Źródło zadań w texu.

```
documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm
textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt
usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc}
%usepackage{MnSymbol} % ----- vfuzz4pt %
Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if
over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newtheorem{useless}[thm]{} begin{document} defrozv{\ textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{\circ}}
title{Kółko  $2.2^2\$$  - nieróżności i różności} date{} maketitle paragraph{Nieróżności}
begin{enumerate} item Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 
zachodzi nierówność  $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots +$ 
 $a_{n-1}^2 a_n + a_n^2 a_1$  item Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$ 
zachodzi nierówność  $a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq abc(a+b+c) = a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab$  item Suma
nieujemnych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  jest nie większa od  $3$ . Pokazać, że zachodzi
nierówność  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{2}$  footnotesize{źródło:
staszic} normalsize item Udowodnić, że dla liczb dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność
 $\frac{\sqrt{a}}{a+b} + \frac{\sqrt{b}}{b+c} + \frac{\sqrt{c}}{c+a} \geq$ 
 $\frac{\sqrt{a}}{a+b} + \frac{\sqrt{b}}{b+c} + \frac{\sqrt{c}}{c+a}$  item Udowodnić, że dla liczb
dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność
 $\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{a+c} + \frac{\sqrt{c}}{a+b} \geq$ 
 $\frac{\sqrt{b}}{a+b} + \frac{\sqrt{c}}{b+c} + \frac{\sqrt{a}}{c+a}$  item * Znajdź przykłady liczb i
ciągów dodatnich, dla których poniższe nierówności nie są prawdziwe, lub udowodnij ich
prawdziwość: begin{enumerate} item  $a^4 b + b^4 c + c^4 d + d^4 a \geq$ 
 $a^3 bc + b^3 cd + c^3 da + d^3 ab$  item
```

## Ciągi jednonotoniczne

Wpisany przez Joachim Jelisiejew  
niedziela, 07 lutego 2010 17:35 -

---

$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\dots+a_nb_nc_n \geq a_nb_1c_1+a_{n-1}b_2c_2+\dots+a_1b_nc_n$$
 jeżeli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są niemalejące, a  $(c_n)$  jest nierosnący.      item 
$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\dots+a_nb_nc_n \leq a_nb_1c_1+a_{n-1}b_2c_2+\dots+a_1b_nc_n$$
 jeżeli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są niemalejące, a  $(c_n)$  jest nierosnący.    end{enumerate} end{enumerate}

paragraph{Różności} begin{enumerate} item Na tablicy  $2n \times 2n$  zamalowano  $3n$  pól. Udowodnij, że można tak dobrać  $n$  kolumn i  $n$  wierszy tej tablicy, żeby każde zamalowane pole leżało w pewnej wybranej kolumnie lub w pewnym wybranym wierszu. (footnotesize{źródło: staszic}) normalsize item Mamy daną płaszczyznę, podzieloną liniami poziomymi i pionowymi na kwadraty  $1 \times 1$ . W każdy kwadrat wpisujemy liczbę naturalną, przy czym żadna liczba nie jest wpisana więcej niż raz. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ , że można wskazać dwa sąsiednie pola, takie, że różnica liczb wpisanych w te pola jest większa od  $n$ . (footnotesize{źródło: zadania przygotowawcze do Podlaskiego Konkursu Matematycznego}) normalsize item  $P(x)$  jest takim wielomianem o współczynnikach całkowitych, że zarówno równanie  $P(x)=1$  jak i  $P(x)=3$  ma co najmniej jedno rozwiązanie całkowite. Rozstrzygnij, czy równanie  $P(x)=2$  może mieć 2 różne rozwiązania całkowite. (footnotesize{źródło: staszic}) normalsize item Niech  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ . Udowodnić, że  $a_n \geq \frac{1}{2}$  :) end{enumerate} end{document}