** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Tue Nov 01 08:00 PM 2011 C % Last Change: Tue Nov 01 08:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 26cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty} defsectionwidth{8cm} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{Joachim Jelisiejew} defdate{2 listopada 2011} usepackage{multicol} begin{document} setlength{topmargin}{-1.5cm} setlength{footskip}{10pt} section{Warunki} %subsection{Młodsi~--- warunki} begin{problem}[Przykład] Liczby dodatnie a, b, c są takie, że $a + b + c = frac{1}{223}$. Uzasadnij, że $frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c} geq 2007$. end{problem} vskip 1em W~większości wypadków stykając się z~nierównością zawierającą warunek możemy go usunąć. Metoda używa tzw. wyrażeń jednorodnych. Zauważmy, że podstawienie w~wyrażeniu $frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c}$ zamiast a liczby $ncdot a$, zamiast b liczby $ncdot b$ i~zamiast c liczby $ncdot c$ da nam wyrażenie $n^{bold{-1}}cdot left(frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c} right)$. Powiemy więc, że wyrażenie $frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c}$ jest jednorodne stopnia $bold{-1}$. Pora na formalną definicję $ddotsmile$, która w~zasadzie nie jest potrzebna, jak się zrozumie, o~co chodzi: begin{defn}[Wyrażenie jednorodne] Wyrażenie jest jednorodne stopnia k, jeżeli dla każdego $n > 0$ po powiększeniu n razy każdej ze zmiennych wyjściowe wyrażenie przyjmuje wartość n^k razy większą. end{defn} begin{cor} Jeżeli wyrażenie W jest stopnia k i~V jest stopnia k, to $W + V$ jest stopnia k. Jeżeli W jest stopnia k, a~V stopnia l, to $Wcdot V$ jest stopnia $k + l$. end{cor} Przykłady wyrażeń (zmienne wszędzie a, b, c): begin{multicols}{2} begin{enumerate} item Wyrażenia $a, a + 2cdot b, a + b + c$ są jednorodne stopnia 1, gdyż $(na) = ncdot (a), (na) + 2cdot (nb) = ncdot (a + 2cdot b)$ oraz $(na) + (nb) + (nc) = ncdot (a + b+ c)$. item Wyrażenie 4 jest jednorodne stopnia 0~--- cokolwiek nie zmienialibyśmy w~zmiennych a, b, c wartość jest stała. Jednorodne stopnia 0 jest też wyrażenie $frac{b}{c}$ oraz np. wyrażenie $frac{b^2}{ac} + 2 + a^{-1}b$. item Wyrażenie $frac{a^4}{b} + bccdot sqrt{ab}$ jest jednorodne stopnia 3, bo [frac{(na)^4}2 + (nb)(nc)cdot sqrt{(na)(nb)} = n^3cdot left(frac{a^4}{b} + bccdot sqrt{ab}right).] item Wyrażenie $a^2 + b$ nie jest jednorodne, bo (emph{to nie formalne wyjaśnienie}) $(ncdot a)^2 + nb = n^2 a^2 + ncdot b$ i~tego nie da się przedstawić w~postaci $n^kcdot (a^2 + b)$. end{enumerate} end{multicols} begin{sol}[Rozwiązanie zadania 1] emph{Część nieoficjalna~--- jak wykorzystać warunek.} Chcemy tak użyć warunku, by w~nierówności będącej tezą strony były jednorodne i~równych stopni. $frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c}$ jest stopnia -1, a~2007 jest stopnia 0. W~warunku lewa strona jest stopnia 1 a~prawda stopnia 0, zatem wymnażamy lewą stronę teza przez (dodatnią!) lewą stronę warunku, a~prawą stronę tezy przez prawą stronę warunku: [(a + b + c)cdot left(frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c} right) geq 9] co po podzieleniu przez $3cdot left(frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c} right)$ jest nierównością pomiędzy średnią arytmetyczną, a~harmoniczną. end{sol} emph{Wszystkie poniższe zadania po odpowiednim wstawieniu warunku sprowadzają się do nierówności, które można udowodnić stosując średnią arytmetyczną i~geometryczną.} begin{problem} Kwadraty liczb dodatnich a, b, c sumują się do 1. Uzasadnij, że $-frac{1}{2} leq ab + bc + ca leq 1$. end{problem} begin{problem} Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Udowodnij, że zachodzi nierówność $a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ca) geq -frac{1}{3}$. end{problem} begin{problem} Iloczyn liczb dodatnich a, b, c jest równy 1. Udowodnij, że $a + b + c geq 3$. Wykaż też, że $a^2 + b^2 + c^2 geq 3$. end{problem} begin{problem} Iloczyn liczb dodatnich a,b,c,d to 2011. Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}$? end{problem} begin{problem}[Zadanie $star$] Liczby dodatnie a, b, c sumują się do 1. Pokaż, że $(1+a)(1+b)(1+c) geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$. end{problem} end{document}