Teoria liczb dla młodszych II

Wpisany przez Joachim Jelisiejew
wtorek, 20 grudnia 2011 19:08 -

** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: podstawy-tl.tex % Created: Sun Dec 11 11:00 PM 2011 C % Last Change: Sun Dec 11 11:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty} defsectionwidth{7cm} %include{style} defheadpicture{rosnaca.jpg} defauthor{Joachim Jelisiejew} defdate{12 grudnia 2011} begin{document} setlength{topmargin}{-2cm} section{Kongruencje II} begin{problem}[Zadanie (Małe twierdzenie Fermata)] Niech p będzie liczbą pierwszą, a~a będzie liczbą całkowitą niepodzielną przez p. begin{enumerate} item Udowodnij, że liczby ${0cdot a, 1cdot a,dots, (p-1)cdot a}$ dają różne reszty z~dzielenia przez p. item Udowodnij emph{małe twierdzenie Fermata}: [a^{p-1} equiv 1 mod p.] item Wywnioskuj, że textbf{dla wszystkich} liczb całkowitych a zachodzi $a^p equiv a mod p$. end{enumerate} end{problem} begin{problem} Uzasadnij, że jeśli $NWD(a, 105) = 1$ to $7big|a^6 - 1, 3big|a^2 - 1, 5big|a^4 - 1$.   Pokaż, że jeśli $NWD(a, 105) = 1$ to $105big|a^{12} - 1$. end{problem}   begin{problem}   Pokaż, że jeżeli p jest pierwsza, to jedynymi rozwiązaniami równania $x^2 equiv 1 mod p$ są $1mod p$ i~$-1mod p$ (emph{tzn. każda liczba   całkowita x spełniająca $x^2 equiv 1$, przystaje do 1 lub -1 modulo p}).   Pokaż, że bez założenia, że p jest pierwsza, teza zadania nie byłaby   prawdziwa. end{problem}   begin{problem}   Udowodnij, że jeśli p jest pierwsza, a~a całkowita niepodzielna przez p, to   [a^{frac{p-1}{2}} equiv 1 mod phbox{ lub }a^{frac{p-1}{2}}equiv   -1 mod p.]   Wywnioskuj, że sześciany liczb całkowitych dają z~dzielenia przez 7 reszty ze zbioru ${0, 1, -1}$. end{problem}   begin{problem}   Uzasadnij, że równanie $7^n = x^3 + 2y^3$ nie ma rozwiązań w~liczbach   całkowitych dodatnich x, y, n. end{problem}   begin{problem}   Oblicz, jakie reszty dają kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 (użyj zadania 2.) i~przez 4. Pokaż, że równania $3^n = x^2 + y^2$ i~$4^n = x^2 + y^2$ nie mają rozwiązań w~liczbach całkowitych dodatnich x, y, n. end{problem}   end{document}