



[](#)
[Zadania PDF.](#)

Źródło zadań w texu.

```
% File: mlodsi.tex % Created: Sun Nov 13 07:00 PM 2011 C % Last Change: Sun
Nov 13 07:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin
0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel}
usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import}
%usepackage{MnSymbol} % ----- vfuzz4pt %
Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if
over-edge is small % THEOREMS -----
newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek}
newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja}
newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza}
newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{ vskip 3mm
noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{
stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}} } {hfillpar} defabs
#1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant}
renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty}
defsectionwidth{8cm} %include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{Joachim
Jelisiejew} defdate{15 listopada 2011} begin{document} section{Średnie~--- dowód}
begin{defn} Niech liczby  $a_1, \dots, a_n$  będą dodatnie. Definiujemy średnie:
begin{enumerate} item Harmoniczną:  $H_n(a_1, \dots, a_n) := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ . np.  $H_3(a, b, c) = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ . item Geometryczną:  $G_n(a_1, \dots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ , np.  $G_6(q, w, e, r, t, y) = \sqrt[6]{qwerty}$ . item Arytmetyczną:  $A_n(a_1, \dots, a_n) := \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , np.  $A_2(x, y) = \frac{x+y}{2}$ .
item Kwadratową:  $K_n(a_1, \dots, a_n) := \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots +$ 
```

Nierówności pomiędzy średnimi -- dowód (15.11.2011)

Wpisany przez Joachim Jelisiejew

wtorek, 15 listopada 2011 21:09 - Poprawiony wtorek, 15 listopada 2011 21:11

a_n^2 }, np. $K_4(1, 2, 3, 4) = \sqrt{\frac{1 + 4 + 9 + 16}{4}}$. end{enumerate}
end{defn} emph{Celem tego kółka jest udowodnienie następującego twierdzenia (w~wersji bez gwiazdki, dla $n \leq 4$):} begin{thm}[Nierówność pomiędzy średnimi] Jeżeli liczby a_1, \dots, a_n są dodatnie, to $[H_n(a_1, \dots, a_n) \leq G_n(a_1, \dots, a_n) \leq A_n(a_1, \dots, a_n) \leq K_n(a_1, \dots, a_n).]$ end{thm} begin{problem} emph{Na początku udowodnisz nierówność $G_n \leq A_n$.} begin{enumerate} item Udowodnij, że $G_2(a_1, a_2) \leq A_2(a_1, a_2)$. item Udowodnij nierówność $G_4(a_1, a_2, a_3, a_4) \leq A_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$. \emph{Zauważ, że $G_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = G_2(G_2(a_1, a_2), G_2(a_3, a_4))$. Zastosuj $G_2 \leq A_2$.} item Udowodnij nierówność $G_3(a_1, a_2, a_3) \leq A_3(a_1, a_2, a_3)$. \emph{Przekształć nierówność $G_4(a_1, a_2, a_3, A_3(a_1, a_2, a_3)) \leq A_4(a_1, a_2, a_3, A_3(a_1, a_2, a_3))$.} item \star . Uogólnij poprzednie punkty aby udowodnić, że jeśli $G_n \leq A_n$ to $G_{2n} \leq A_{2n}$ oraz $G_{n-1} \leq A_{n-1}$. Wywnioskuj, że $G_n \leq A_n$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \geq 1$ stosując np. dziwny rodzaj indukcji. end{enumerate} end{problem} begin{problem} Udowodnij, że begin{enumerate} item $H_n(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) = A_n(a_1, \dots, a_n)^{-1}$ item $G_n(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) = G_n(a_1, \dots, a_n)^{-1}$. item $H_n \leq G_n$. \emph{Zastosuj $G_n \leq A_n$ dla odwrotności.} end{enumerate} end{problem} begin{problem} Udowodnij $A_n \leq K_n$, podnosząc obie strony do kwadratu. Jeżeli masz problemy, spróbuj najpierw dla $n=2$, potem ewentualnie $n=3$. end{problem} end{document}