

Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Sun Oct 23 03:00 PM 2011 C % Last Change: Sun Oct 23 03:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} deflabelproblem{sectionID{}theproblem{}} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 3mm noindent{textsc{bfseries #1 labelproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{./}{style-poprawki.sty} %include{style} defheadpicture{pi_roger.jpg} defauthor{Joachim Jelisiejew} defdate{25 października 2011} defbareroger{includegraphics[height=1em]{jolly-roger-mat}} defroger{ hbox{bareroger{}} } usepackage{multicol} begin{document} section{Nierówności I} subsection{Młodsi} defsectionID{M} begin{problem} emph{Bez teorii.} Liczby \$a, b\$ są rzeczywiste, a~liczby \$x, y\$~--- rzeczywiste dodatnie. We wszystkich poniższych nierównościach zastąp bareroger{} jednym ze znaków: \$geq, leq\$ po czym udowodnij otrzymaną nierówność. begin{multicols}{2} begin{enumerate} item \$a^2 + b^2 roger 2ab\$ item \$(a+b)^2 roger 4ab\$ item \$frac{1}{x} + frac{1}{y} roger frac{4}{x+y}\$ item \$frac{2}{sqrt{xy}} roger frac{1}{x} + frac{1}{y}$ item $2sqrt{xy} roger x + y$ item $2(x+1)(y+1) roger 2 + x(x+2) + y(y+2)$ end{enumerate} end{multicols} end{problem} begin{thm}[Nierówność pomiędzy średnimi, dla trzech liczb] Jeżeli $a, b, c > 0$ to zachodzi [frac{3}{frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c}} leq sqrt[3]{abc} leq frac{a+ b + c}{3} leq sqrt{frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}.] przy czym równość w~krórejkolwiek z~nierówności zachodzi wtedy i~tylko wtedy, gdy $a = b = c$. end{thm} emph{Warto wiedzieć, że analogiczne nierówności, z~3 zastąpionym w~odpowiednich miejscach przez n, są również prawdziwe. Prawdziwe są też o~wiele ogólniejsze nierówności zwane nierównościami pomiędzy średnimi potęgowymi.} begin{problem} emph{Średnie.} Liczby a, b, c są rzeczywiste dodatnie. We wszystkich poniższych nierównościach zastąp bareroger{} jednym ze znaków: geq, leq po czym udowodnij otrzymaną nierówność. begin{multicols}{2} begin{enumerate} item $frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c} roger frac{9}{a+b+c}$ item $(a+b+c)^2 roger 3(a^2 + b^2 + c^2)$ item $2ab + 2bc + 2ca roger 2(a^2 + b^2 + c^2)$ item $(a + b + c)^2 roger 3(ab + bc + ca)$ item $a^2 + b^2 + c^2 + 3roger 2(a + b + c)$ item $frac{1}{3}cdot (sqrt{a} + sqrt{b} + sqrt{c})^2 roger a + b + c$ end{enumerate} end{multicols} begin{enumerate} setcounter{enumi}{6} item $left(a + frac{b^2}{a} right)^2 + left(b + frac{c^2}{b} right)^2 + left(c + frac{a^2}{c} right)^2 roger 4(a^2 + b^2 + c^2)$ item $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b roger 6abc$ item $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b roger 2(a^3 + b^3 + c^3)$ item $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) roger a^3 + b^3 + c^3 + 6abc$ end{enumerate} end{problem} begin{problem} Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzą nierówności [sqrt{frac{3}{frac{1}{a^2} + frac{1}{b^2} + frac{1}{c^2}}} leq frac{3}{frac{1}{a} + frac{1}{b} + frac{1}{c}}hbox{ oraz }sqrt{frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} leq sqrt[4]{frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}}.] end{problem} end{document}