** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: mlodsi.tex % Created: Sun Mar 04 08:00 PM 2012 C % Last Change: Sun Mar 04 08:00 PM 2012 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 26cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} usepackage{marginnote} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ vskip 3mm noindentemph{#1} } {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} vskip 1mm noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty} defsectionwidth{10cm} %include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{kółko I~LO Białystok} defdate{12 marca 2012} begin{document} setlength{topmargin}{-0.6in} section{Fibonacci II} begin{defn} Ciąg Fibonacciego to ciąg zadany równaniami [F_0 = 0,quad F_1 = 1quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n hbox{ dla } ngeq 2.] ta definicja jest równoważna [F_n = frac{1}{sqrt{5}}cdot left(varphi_1^{n} - varphi_{2}^{n} right) = frac{varphi_1^{n} - varphi_{2}^{n}}{varphi_1 - varphi_2},] gdzie $varphi_1 = frac{1 + sqrt{5}}{2} > varphi_{2} = frac{1 - sqrt{5}}{2}$ są pierwiastkami równania $x^2 = x + 1$. end{defn} subsection{Zadania indukcyjne na Fiba (z~poprzedniego kółka)} begin{problem} Niech n, k będą liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że $F_{n+1}

F_k + F_n F_{k-1} = F_{n+k}$. end{problem}   begin{problem} Niech n będzie liczbą naturalną. Uzasadnij, że $F_1 + F_3 + F_5 + dots + F_{2n-1} = F_{2n}$. end{problem}   begin{problem} Niech n będzie liczbą naturalną.   Uzasadnij, że $F_0 + F_1 + dots + F_{n} = F_{n+2} - 1$. end{problem}   begin{problem} Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że $sum_{i=1}^n iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$. end{problem} begin{problem} Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. end{problem}   begin{problem}   Uzasadnij, że jeżeli $rbig|n$ są liczbami naturalnymi, to $F_rbig|F_n$. end{problem}   begin{problem}[Zadanie $star$]   Uzasadnij, że jeżeli m, n są liczbami naturalnymi, to $NWD(F_n, F_m) =   F_{NWD(n, m)}$. end{problem}   begin{problem}[Zadanie $star$]   Udowodnij tożsamość   [sum_{k=0}^n binom{n}{k} F_{k} = F_{2n}.   ]   emph{Wskazówka: jeżeli robisz algebraicznie, to pamiętaj, że $varphi_{i}^2 = varphi_i + 1$.} end{problem}   subsection{Ciągi rekurencyjne i~macierze, paragraf dla niezainteresowanych poprzednim.} marginnote{it Ten margines jest zbyt wąski, żeby zmieścić teorię z~poprzedniego kółka dotyczącą macierzy.} begin{problem}[Zadanie z~$star$]   Ciąg a_n zadany jest wzorem $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_{n}$.   Oblicz, jaki jest emph{wzór ogólny} (tzn. wzór nierekurencyjny, zależny   tylko od n) tego ciągu, jeżeli   begin{enumerate}   item $a_0 = 1, a_1 = 2$,   item $a_0 = 1, a_1 = 1$,   item $a_0 = 3, a_1 = 5$.   end{enumerate} end{problem}   begin{problem}[Zadanie z~$star$]   Sprawdź, jak mnożymy macierze, korzystając ze wskazówek Yogiego na   tablicy. end{problem}   begin{problem}[Zadanie $starstarstar$]   defF{mathbb{F}}   Połóżmy $F := begin{pmatrix}1 &1\ 1 &0end{pmatrix}$, wtedy $F^n =   begin{pmatrix}   F_{n+1} & F_n \ F_n & F_{n-1}   end{pmatrix}hbox{ dla } n > 0$.   Spróbuj udowodnić wzór $F_{n+1} F_k + F_n F_{k-1} = F_{n+k}$ korzystając ze   wzoru $F^ncdot F^k = F^{n+k}$.   Spróbuj udowodnić wzór $F_0 + F_1 + dots + F_{n} = F_{n+2} - 1$ korzystając ze wzoru $I + F + dots + F^n = frac{F^{n+1} - I}{F - I}$ i~tego, że $1/(F - I) = F$. end{problem} end{document}