** **
Zadania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad.tex % Created: Sun Sep 11 07:00 PM 2011 C % Last Change: Sun Sep 11 07:00 PM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} usepackage{amsthm} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{obs}[thm]{Obserwacja} newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{ stepcounter{problem} noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\\} {hfillpar} defsource#1{\Źródło: #1} defabs #1{leftvert #1rightvert} renewcommand{angle}{sphericalangle} renewcommand{vec}[1]{overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant} renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{ldots} subimport{../}{style.sty} %include{style} defheadpicture{../micek-2cm.jpg} defauthor{Joachim Jelisiejew} defdate{13 września 2011} begin{document} section{Trójkąt Pascala} Mamy następujące begin{problem} Policzyć, ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru $left{ 1, 2, dots, n right}$? end{problem} Pierwszy krok: oznaczmy mądrze problem $ddotsmile$. begin{defn} Niech $binom{n}{k}$ oznacza liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru $left{ 1, 2, dots, n right}$. Oznaczenie $binom{n}{k}$ czytamy ``n po k''. end{defn} Drugi krok: jak możemy wybrać k-elementowy podzbiór? begin{obs} Wszystkie elementy lub 0 elementów możemy wybrać na jeden sposób: [binom{n}{n} = binom{n}{0} = 1] dla każdego n. end{obs} begin{obs} label{add} Zauważmy, że wybierając k-elementowy podzbiór możemy wybrać element ``n'' lub nie. Tak więc [binom{n}{k} = hbox{liczba }khbox{-elementowych podzbiorów}{1,dots,n}=] [hbox{ liczba }khbox{-elementowych podzb.}left{ 1, 2,dots, n right}hbox{ zawierających }n +] [hbox{ liczba }khbox{-elementowych podzb.}left{ 1, 2,dots, n right}hbox{ nie zawierających }n =] [hbox{liczba }k-1hbox{-elementowych podzb. }left{ 1, 2, dots, n-1 right} +] [hbox{liczba }khbox{-elementowych podzb. }left{ 1, 2, dots, n-1 right} =] [binom{n-1}{k-1} + binom{n-1}{k}.] end{obs} Łącznie obserwacje te pozwalają obliczyć np. [binom{3}{2} = binom{2}{2} + binom{2}{1} = 1 + binom{2}{1} = 1 + binom{1}{0} + binom{1}{1} = 3.] Zwykle $binom{n}{k}$ przedstawia się w~postaci tzw. textbf{trójkąta Pascala}: includegraphics{pascal} begin{problem} Uzasadnij z~definicji, że $binom{n}{k} = binom{n}{n-k}$. end{problem} begin{problem} Udowodnij, że [binom{n}{k} = frac{n!}{k!(n-k)!}.] np. korzystając ze wzoru z~obserwacji ref{add}. end{problem} begin{problem} Udowodnij, że jeśli liczba p jest pierwsza, to $pleft|binom{p}{k}right.$ dla $k=1,2,dots,p-1$. end{problem} subsection{Wzór dwumianowy Newtona} Trzeci krok: jak jeszcze możemy wybrać k-elementowy podzbiór? Możemy zdecydować, czy wybieramy element ``$1$'' czy nie, czy wybieramy element ``2'' czy nie itd. Musimy tylko uważać, żeby łącznie wybrać k elementów. Przykładowo: podzbiory zbioru $left{ 1, 2 right}$ to $left{ 1, 2 right}, left{ 1 right}, left{ 2 right}, left{ right} = emptyset$. Załóżmy, że TAK oznacza, że wybieram, że element, NIE oznacza, że nie wybieram elementu. Wtedy podzbiór $left{ 2 right}$ to TAK, NIE, a~zbiór $left{ 1, 2 right}$, TAK, TAK. Można pójść dalej i~zapisać wszystkie podzbiory jako [TAK, TAK; TAK, NIE; NIE, TAK; NIE, NIEhbox{ lub,}] [hbox{ z lekkim nadużyciem } (TAK, NIE)(TAK, NIE) = (TAK, NIE)^2.] Zbiory k-elementowe to te, w~których TAK występuje dokładnie k-razy, nie zważając na kolejność: TAK, NIE i~NIE, TAK, czyli kolejność nie ma znaczenia. Można zapisać, że [(TAK + NIE)^2 = TAK^2 + TAKcdot NIE + NIEcdot TAK + NIE^2 = TAK^2 +2cdot TAKcdot NIE + NIE^2 =] [binom{2}{0}TAK^2 + binom{2}{1}TAKcdot NIE + binom{2}{2}NIE^2.] Ogólnie, możemy to zapisać jako begin{thm}[Wzór dwumianowy Newtona] [(a + b)^n = binom{n}{0}a^n + binom{n}{1}a^{n-1}b + binom{n}{2}a^{n-2}b + dots + binom{n}{n}b^n.] przykładowo $(a+b)^3 = binom{3}{0}a^3 + binom{3}{1}a^2b + binom{3}{2}ab^2 + binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. end{thm} Formalny dowód tego wzoru jest w~zasadzie powtórzeniem tego, co jest powiedziane wyżej, ale będzie on jeszcze pokazany na kółkach. end{document}