



[&nbsp;](#)  
[Zadania PDF.](#)

## Źródło zadań w texu.

```
% File: kongr.tex % Created: Mon Sep 05 09:00 AM 2011 C % Last Change: Mon
Sep 05 09:00 AM 2011 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb}
usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt
headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc}
usepackage[T1]{fontenc} usepackage{polski} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol}
% ----- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if
over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small %
THEOREMS ----- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section]
newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat}
newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość}
newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{example}[thm]{Przykład}
newtheorem{useless}[thm]{} newenvironment{proof}[1][Dowód. ]{noindenttextsc{#1}}
{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie. ]{
noindenttextsc{#1}} {hfillpar} newcounter{problem} newenvironment{problem}[1][Zadanie]{
stepcounter{problem} noindent{textsc{bfseries #1 theproblem}}\} {hfillpar} defdeg{^{\circ}}
defsource#1{\Źródło: #1} renewcommand{thethm}{} renewcommand{angle}{sphericalangle}
renewcommand{vec}[1]{\overrightarrow{#1}} renewcommand{leq}{leqslant}
renewcommand{geq}{geqslant} renewcommand{dots}{\ldots} subimport{../style.sty}
%defteddy{includegraphics{teddy_bear_small.png}} defheadpicture{../micek-2cm.jpg}
defauthor{Joachim Jelisiejew} defdate{6 września 2011} begin{document}
section{Kongruencje} Typ problemu: begin{minipage}{0.5textwidth} begin{problem} Oblicz
ostatnią cyfrę liczb: begin{enumerate} item $2^2 + 1^2$, item $1202^2 + 61^2$, item
$7^4 \cdot 2^5$, item $34067 \cdot 2345$, item $5^4 \cdot 3^6 + 6^3$, item $\star
2^{32}$, item $\star 2^{100}$, item $\star 2^{2^{100}}$, end{enumerate} end{problem}
end{minipage}begin{minipage}{0.5textwidth} begin{problem} Oblicz resztę z~dzielenia przez
$3$ liczb: begin{enumerate} item $2^2 + 1^2$, item $1202^2 + 61^2$, item $7^4 \cdot
```

## Kongruencje

Wpisany przez Joachim Jelisiejew  
wtorek, 06 września 2011 21:28 -

---

$2^5$ ,    item  $34067 \cdot 2345$ ,    item  $5^4 \cdot 2^6 + 7^3$ ,    item  $2^{32}$ ,    item  $2^{100}$ ,    item  $2^{2^{100}}$ , end{enumerate} end{problem} end{minipage}

Podajemy tutaj zapis, który może wydawać się straszny, ale w rzeczywistości jest bardzo wygodny. Wszystkie liczby w poniższych definicjach są całkowite. begin{defn} Mówimy, że  $a$  przystaje do  $b$  modulo  $n$ , jeżeli liczby  $a, b$  dają taką samą resztę z dzielenia przez  $n$ , innymi słowy, gdy  $a - b$  jest podzielne przez  $n$ . Oznaczamy tę sytuację  $a \equiv b \pmod{n}$ . Pewne zastanawiające własności są takie: begin{enumerate} item jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$ , to  $b \equiv a \pmod{n}$ . item jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$  i  $b \equiv c \pmod{n}$ , to  $a \equiv c \pmod{n}$ . end{enumerate} end{defn} begin{thm} Jeżeli  $a \equiv b \pmod{n}$  oraz  $a' \equiv b' \pmod{n}$ , to begin{enumerate} item  $a + a' \equiv b + b' \pmod{n}$ , item  $a - a' \equiv b - b' \pmod{n}$ , item  $a \cdot a' \equiv b \cdot b' \pmod{n}$ . item  $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ , dla każdego  $m$  naturalnego, np.  $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ . end{enumerate} end{thm} begin{example} Obliczyć resztę z dzielenia przez  $7$  liczby  $45^3 \cdot 54^2$ . end{example} begin{sol} Trik polega na redukowaniu obliczeń do małych liczb: Zauważmy, że  $45 \equiv -4 \pmod{7}$  (bo  $7 \mid 45 - (-4) = 49$ ), więc  $45^3 \equiv (-4)^3 = -64 \pmod{7}$ . Ale  $-64 \equiv -1 \pmod{7}$ , więc  $45^3 \equiv -1 \pmod{7}$ . Analogicznie, obliczamy  $54 \equiv 5 \pmod{7}$ , więc  $54^2 \equiv 5^2 = 25 \pmod{7}$ . Ale  $25 \equiv 4 \pmod{7}$ , więc  $54^2 \equiv 4 \pmod{7}$ . Łącznie  $45^3 \equiv -1 \pmod{7}$  i  $54^2 \equiv 4 \pmod{7}$ , więc  $45^3 \cdot 54^2 \equiv -1 \cdot 4 = -4 \pmod{7}$ . Trzeba jeszcze zauważyć, że  $-4 \equiv 3 \pmod{7}$ . Odpowiedź: liczba  $45^3 \cdot 54^2$  daje resztę  $3$  z dzielenia przez  $7$ . end{sol} begin{problem}[Zadanie] Dowiedz, że liczba  $n$  daje taką samą resztę z dzielenia przez  $9$ , jak suma cyfr  $n$ . end{problem} begin{problem}[Zadanie] Dowiedz, że liczba  $n$  daje taką samą resztę z dzielenia przez  $11$ , jak cyfry  $n$  zsumowane ze znakami  $+$  i  $-$  na przemian: np.  $123$  daje taką samą resztę jak  $1 - 2 + 3 = 2$ . end{problem} vskip 3cm end{document}