** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad2.tex % Created: wto kwi 27 09:00 2010 C % Last Change: wto kwi 27 09:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}{noindenttextsc{Dowód.}}{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}{noindenttextsc{Rozwiązanie. }}{par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Eliminacje do PTM} begin{enumerate} item Dany jest graf nieskierowany, prościej mówiąc wierzchołki połączone krawędziami (co najwyżej jedna krawędź pomiędzy dwoma różnych wierzchołkami, nie ma krawędzi prowadzących z wierzchołka do tego samego wierzchołka). emph{Stopniem} wierzchołka nazywamy ilość krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Uzasadnić, że pewne dwa wierzchołki mają ten sam stopień. item Uzasadnij, że liczba postaci $8k-1$ gdzie $kin mathbb{Z}$ nie może być przedstawiona w postaci sumy trzech kwadratów liczb całkowitych. item Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n część całkowita liczby $$frac{n^2 + n}{3}$$ jest parzysta. item Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A,B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $|PX| = |PY|$. end{enumerate} vskip 2cm section{Eliminacje do PTM} begin{enumerate} item Dany jest graf nieskierowany, prościej mówiąc wierzchołki połączone krawędziami (co najwyżej jedna krawędź pomiędzy dwoma różnych wierzchołkami, nie ma krawędzi prowadzących z wierzchołka do tego samego wierzchołka). emph{Stopniem} wierzchołka nazywamy ilość krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Uzasadnić, że pewne dwa wierzchołki mają ten sam stopień. item Uzasadnij, że liczba postaci $8k-1$ gdzie $kin mathbb{Z}$ nie może być przedstawiona w postaci sumy trzech kwadratów liczb całkowitych. item Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n część całkowita liczby $$frac{n^2 + n}{3}$$ jest parzysta. item Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A,B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $|PX| = |PY|$. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: zad2.tex % Created: wto kwi 27 09:00 2010 C % Last Change: wto kwi 27 09:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}{noindenttextsc{Dowód.}}{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}{noindenttextsc{Rozwiązanie. }}{par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} deffloor#1{leftlfloor #1rightrfloor} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Eliminacje do PTM} begin{enumerate} item Dany jest graf nieskierowany, prościej mówiąc wierzchołki połączone krawędziami (co najwyżej jedna krawędź pomiędzy dwoma różnych wierzchołkami, nie ma krawędzi prowadzących z wierzchołka do tego samego wierzchołka). emph{Stopniem} wierzchołka nazywamy ilość krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Uzasadnić, że pewne dwa wierzchołki mają ten sam stopień. begin{proof} Załóżmy, że graf ma $n geq 1$ wierzchołków. Zauważmy, że z warunków zadania wynika, że wierzchołek może mieć stopień $$0,1,dots,n-1$$ Rozważmy dwa przypadki: begin{enumerate} item Istnieje wierzchołek stopnia 0. Wierzchołek stopnia 0 nie jest połączony z żadnym wierzchołkiem, więc żaden wierzchołek nie jest połączony z nim, czyli nie istnieje wierzchołek stopnia $n-1$. Mamy n wierzchołków i $n-1$ możliwych stopni: $0,1,dots,n-2$. Któreś dwa wierzchołki muszą mieć ten sam stopień. item Analogicznie jak w przypadku poprzednim -- mamy n wierzchołków i $n-1$ możliwych stopni: $1,2,dots,n-1$. end{enumerate} $ $ end{proof} item Uzasadnij, że liczba postaci $8k-1$ gdzie $kin mathbb{Z}$ nie może być przedstawiona w postaci sumy trzech kwadratów liczb całkowitych. begin{proof} Kwadraty liczb całkowitych dają reszty $0,1,4$ z dzielenia przez 8: begin{tabular}{|c||c|c|c|c|c|c|c|c|} hline n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ hline $n^2 mod 8$ & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1\ hline end{tabular} emph{Zauważmy tutaj, że $(n-k)^2 equiv k^2 mod n$, więc wystarczyłoby policzyć reszty $0,1,2,3,4$, co jest krótsze :)} Gdyby zachodziła równość $$x^2 + y^2 + z^2 = 8k - 1$$ dla pewnych $x,y,z,kin mathbb{Z}$, to musiałaby także zajść równość $$r_x + r_y + r_z equiv -1 mod 8$$ gdzie $r_x,r_y,r_zin left{ 0,1,4 right}$. Taka równość nie zachodzi -- bezpośrednio sprawdzamy wszystkie możliwości. end{proof} item Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n część całkowita liczby $$frac{n^2 + n}{3}$$ jest parzysta. begin{proof} Najprościej bezpośrednio to przeliczyć. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą, $n = 3k + r$ gdzie $0leq rleq 2$. Obliczam: $$floor{frac{n^2 + n}{3}} = floor{frac{9k^2 + 6kr + r^2 + 3k + r}{3}} = (3k^2 + k) + 2kr + floor{frac{r^2 + r}{3}}$$ Wystarczy sprawdzić, że wszystkie wyrazy sumy po prawej są parzyste. $2kr$ jest parzyste. $3k^2 + k$ jest także parzyste, gdyż $$3k^2 = 2k^2 + k^2 equiv k^2 equiv k mod 2$$ $$3k^2 + k equiv 2k equiv 0 mod 2$$ Parzystość $floor{frac{r^2 + r}{3}}$ przeliczamy bezpośrednio podstawiając $r=0,1,2$. end{proof} item Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A,B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $|PX| = |PY|$. begin{proof} begin{thm}[Twierdzenie o siecznych, wersja ze styczną] Niech dany będzie okrąg o i punkt P leżący poza okręgiem o. Prosta PC jest styczna do o w C, inna prosta przechodząca przez P przecina o w A,B. Wtedy $$|PA|cdot |PB| = |PC|^2$$ end{thm} Stosuję twierdzenie dla punktu P, okręgu O_1 i prostej AB: $$|PX|^2 = |PA|cdot |PB|$$ oraz punktu P, okręgu O_2 i prostej AB: $$|PY|^2 = |PA|cdot |PB|$$ emph{Uwaga: tutaj po cichu korzystamy z założenia, że AB jest wspólną cięciwą O_1 i O_2.} Łącząc powyższe równości: $|PX|^2 = |PY|^2$, a więc $|PX| = |PY|$. end{proof} end{enumerate} end{document}