** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}}{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} renewcommand{thethm}{} section{Elimki elimki} emph{Eliminacje trwają 2h. Nie spodziewam się, że wszyscy zrobią po 4 zadania w tak krótkim czasie -- rzuciłem aż cztery, żeby każdy znalazł coś dla siebie.} begin{enumerate} item Liczby x,y,z,t są rzeczywiste dodatnie. Uzasadnić, że begin{enumerate} item $sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: a.tex % Created: czw maj 06 09:00 2010 C % Last Change: czw maj 06 09:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}[1][Dowód.]{noindenttextsc{#1}} {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}[1][Rozwiązanie.]{ noindenttextsc{#1}} {par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} renewcommand{thethm}{} section{Elimki elimki} emph{Eliminacje trwają 2h. Nie spodziewam się, że wszyscy zrobią po 4 zadania w tak krótkim czasie -- rzuciłem aż cztery, żeby każdy znalazł coś dla siebie.} begin{enumerate} item Liczby x,y,z,t są rzeczywiste dodatnie. Uzasadnić, że begin{enumerate} item $sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy} < x+sqrt{y^2 + z^2}$ begin{proof} emph{Można to oczywiście rozpałować przez podnoszenie do kwadratu, podobnie jak następny podpunkt, ale rozwiązanie jest inne.} Niech $X=(0,0),Y=(x,0),Z=(x+y,z)$. Nierówność z zadania można równoważnie zapisać jako $$|XZ| < |XY| + |YZ|$$ a to jest nierówność trójkąta. end{proof} item $sqrt{x^2 + z^2} < sqrt{x^2 + t^2} + sqrt{t^2+y^2} + sqrt{y^2 + z^2}$ begin{proof} Podobnie jak w poprzednim zadaniu, niech: $$A=(-z,0), B=(0,y), C=(t,0), D=(0,-x)$$ Wtedy nierówność przekształca się po postaci $$|AD| < |DC| + |CB| + |BA|$$ prawdziwej na mocy nierówności trójkąta: $$|AD| < |DC| + |CA| < |DC| + |CB| + |BA|$$ przy czym żadne 3 punkty nie są współliniowe, więc nierówność trójkąta można stosować. end{proof} end{enumerate} item Znaleźć wszystkie pary (a,b) liczb całkowitych, takich, że $$hbox{ dla każdej niezerowej liczby całkowitej }x hbox{ liczba }x^2+ax+bhbox{ jest pierwsza.}$$ begin{sol} textbf{Odpowiedź:} Takie pary nie istnieją. Niech pomocniczo $f(x) = x^2 + ax + b$. Załóżmy, że taka para (a,b) istnieje, czyli $f(x)$ jest pierwsze dla wszystkich x poza 0. Rozważmy najpierw przypadek $b=0$. Mamy wykazać, że $x(x+a)$ jest pierwsze dla wszystkich x poza 0 -- to jest oczywista bzdura. A więc $bneq 0$. Możemy zatem twierdzić, że dla każdego k niezerowego liczba $$f(kb) = k^2b^2 + akb + b = b(k^2b+ka+1)$$ jest pierwsza. Załóżmy, że $bneq 1 hbox{ i }bneq -1$, a więc dla każdego niezerowego całkowitego k musi być $k^2b + ka +1 = 1hbox{ lub }k^2b + ka + 1=-1$, gdyż iloczyn b i $k^2b+ka+1$ jest liczbą pierwszą. Wielomian $bx^2 + xa

+1$ przyjmuje nieskończenie wiele razy wartość 1 lub nieskończenie wiele razy wartość -1 (we wszystkich nieskończenie wielu liczbach całkowitych niezerowych przyjmuje jedną z tych wartości). Ale wielomian, który nieskończenie wiele razy przyjmuje tę samą wartość jest stały (emph{to jest użycie mocnej teorii}), zatem $bx^2+xa+1equiv 0$ (równość wielomianów), $b=0$, sprzeczność. Z tego wszystkiego wynika $b=pm 1$. Załóżmy, że $aneq 0$. Wtedy $-aneq 0$, więc $$f(-a) = b$$ jest pierwsza. Ale to nieprawda, gdyż $b=pm 1$. Zatem $a=0$. Skoro $b=pm 1$ to mamy już tylko dwa przypadki: $$x^2 + 1hbox{ lub }x^2-1$$ wartości obu tych wyrażeń nie są liczbami pierwszymi już dla $x=3$. Sprzeczność. end{sol} item W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 45^{circ} oraz $|AB|=1$. Punkty D,E leżą na bokach BC,AC odpowiednio, oraz $AD perp BC, BEperp AC$. Obliczyć $|DE|$, odpowiedź uzasadnić. begin{proof} Rozwiązanie znajduje się na oficjalnej stronie podlaskiego konkursu matematycznego -- tj. na signum.pb.bialystok.pl lub (może w jakiejś przyszłości) www.ptm.pb.bialystok.pl w dziale ``Konkurs Matematyczny PB 2010'' zadania przygotowawcze dla gimnazjum -- rozwiązania. end{proof} item Wykazać, że istnieje liczba postaci $11dots1$ podzielna przez 7052010705201. begin{proof} Niech $n=7052010705201$. Zauważmy, że liczba n jest względnie pierwsza z 10 tj. $NWD(n,10) =1$. Bierzemy liczby $$1,11,111,dots,underbrace{11dots11}_{n+1}$$ Jest ich $n+1$ a reszt z dzielenia przez n jest n, więc któreś dwie dają równe reszty z dzielenia przez n: $$n|underbrace{11dots11}_{k} - underbrace{11dots11}_l = underbrace{11dots1}_{k-l}underbrace{0dots0}_l$$ dla pewnych $k < l$. Ale n jest względnie piewsze z 10, więc $$n|underbrace{11dots1}_{k-l}underbrace{0dots0}_l = underbrace{11dots1}_{k-l}cdot 10^{l}hbox{ implikuje } n|underbrace{11dots1}_{k-l}$$ to kończy dowód. end{proof} end{enumerate} end{document}