** **
Zadania PDF.

** **
Rozwiązania PDF.

Źródło zadań w texu.

% File: zad2.tex % Created: wto kwi 27 09:00 2010 C % Last Change: wto kwi 27 09:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS -- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}{noindenttextsc{Dowód.}}{nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}{noindenttextsc{Rozwiązanie. }}{par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Eliminacje do PTM} begin{enumerate} item Dany jest kwadrat $4times 4$ wypełniony jedynkami oprócz trzech miejsc na przekątnej, gdzie wpisane są -1. Ruch polega na zmianie znaku wszystkich liczb w wierszu, kolumnie, lub na dużej przekątnej. Rozstrzygnij, czy da się zamienić wszystkie liczby na jedynki. item Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba n^5-n jest podzielna przez 120. item Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c zachodzi nierówność $$frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 geq ab - ac + 2bc$$ item Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC, k, l, m oznaczają symetralne odcinków AI, BI, CI odpowiednio. Oznaczmy jako X, Y,Z punkty przecięcia prostych k,l, l,m, m,k. Uzasadnić, że na sześciokącie $ABCXYZ$ da się opisać okrąg. end{enumerate} end{document}

Źródło rozwiązań w texu.

% File: zad2.tex % Created: wto kwi 27 09:00 2010 C % Last Change: wto kwi 27 09:00 2010 C documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{import} %usepackage{MnSymbol} % -- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newtheorem{problem}[thm]{Zadanie} newenvironment{proof}{noindenttextsc{Dowód.} } {nolinebreak[4]hfill$blacksquare$\par} newenvironment{sol}{noindenttextsc{Rozwiązanie. } } {par} defrozw{$ $\textbf{Rozwiązanie}: \} defdeg{^{circ}} subimport{../}{style} %include{style} defsource#1{\Źródło: #1} begin{document} section{Eliminacje do PTM} begin{enumerate} item Dany jest kwadrat $4times 4$ wypełniony jedynkami oprócz trzech miejsc na przekątnej, gdzie wpisane są -1. Ruch polega na zmianie znaku wszystkich liczb w wierszu, kolumnie, lub na dużej przekątnej. Rozstrzygnij, czy da się zamienić wszystkie liczby na jedynki. begin{sol} textbf{Odpowiedź:} Nie da się. Udowodnimy, że ilość -1 na planszy jest stale nieparzysta. Z tego wyniknie, że nie da się zamienić wszystkich liczb na jedynki, gdyż jeżeli dałoby się, to po ostatnim ruchu ilość -1 byłaby równa 0, a więc parzysta. Przed wykonaniem jakiekolwiek ruchu ilość -1 jest nieparzysta -- mamy w 3 polach -1. Zauważmy, że ruch nie zmienia parzystości ilości -1. W każdym ruchu zmieniany parzystość 4 liczb. Załóżmy, że przed ruchem w tych liczbach było k liczb równych -1. Po ruchu -1 będzie $4-k$. Zatem ilość -1 emph{zmieni się} o $4- k - k = 2(2 - k)$, czyli o liczbę parzystą, zatem parzystość ilości -1 nie zmieni się. end{sol} item Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba n^5-n jest podzielna przez 120. begin{sol} $120 = 3cdot 5cdot 8$, więc wystarczy sprawdzić, dla których n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 3, przez 5 i przez 8. Zauważmy po pierwsze, że $$n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Bezpośrednio sprawdzając reszty z dzielenia przez 3 (tj. przypadki $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$) i przez 5 stwierdzamy, że $$3 | n^5 - nhbox{ i } 5|n^5 - n$$ dla emph{wszystkich} n. emph{Te podzielności są szczególnymi przypadkami tzw. małego twierdzenia Fermata, mówiącego, że $p|m^p - m$ jeżeli liczba p jest pierwsza, a m dowolna całkowita.} A więc mamy rozstrzygnąć, dla jakich n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 8. Rozważmy przypadek n parzystego i nieparzystego. begin{enumerate} item $2|n$. Wynika stąd, że $2not| n-1$, $2not| n+1$ i $2not| n^2 + 1$. A więc $8 | n^5 - n = n(n+1)(n-1)(n^2 +1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $8|n$. item $2not|n$, zatem $2|n-1$, $2|n+1$, $2|n^2 +1$, więc $$8 | (n-1)(n+1)(n^2+1) | n^5 - n$$ end{enumerate} textbf{Odpowiedź:} $120|n^5 - n$ dla n podzielnego przez 8 lub nieparzystego. end{sol} item Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b,c zachodzi nierówność $$frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 geq ab - ac + 2bc$$ begin{proof} Nierówność jest równoważna nierówności $$left(frac{a}{2} + c - b right)^2 geq 0$$ która jest oczywiście prawdziwa. end{proof} item Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC, k, l, m oznaczają symetralne odcinków AI, BI, CI odpowiednio. Oznaczmy jako X, Y,Z punkty przecięcia prostych k,l, l,m, m,k. Uzasadnić, że na sześciokącie $ABCXYZ$ da się opisać okrąg. begin{proof} begin{lem} Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego ABC, S oznacza punkt przecięcia AI z okręgiem o. Wtedy $$|BS| = |CS| = |IS|$$ end{lem} begin{proof} Prosta AI jest dwusieczną, zatem $angle SAB = angle SAC$. Ponadto $angle SAB = angle SCB$ i $angle SAC = angle SBC$ na mocy równości kątów wpisanych w okrąg. Łącząc te zależności uzyskujemy $$angle SCB = angle SBC$$ a więc $|SB| = |SC|$. Pozostaje udowodnić $|SB| = |SI|$. Oznaczmy $alpha := angle BAC, beta:=angle ABC, gamma:=angle BCA$. Popatrzmy na trójkąt $triangle ISB$. Mamy $$angle IBS = beta/2 + alpha/2hbox{ oraz }angle ISB = gamma$$ zatem $angle SIB = 180deg - beta/2 - alpha/2 - gamma = alpha/2 + beta/2 = angle IBS$. Tak więc trójkąt ISB jest równoramienny -- $|IS| = |BS|$, co kończy dowód. end{proof} Wracając do zadania rozważmy punkt S przecięcia AI z okręgiem opisanym na ABC. Lemat orzeka, że zachodzą równości $$|SI| = |SB| hbox{ oraz } |SI| = |SC|$$ emph{Przypomnijmy: } Symetralna danego odcinka KL to inaczej zbiór emph{wszystkich} punktów równoodległych od K i L. Z powyższych równości wynika, że S leży na symetralnej BI i na symetralnej CI. Zatem $S = Z$, czyli punkt Z leży na okręgu opisanym na ABC. Rozpatrując analogicznie przecięcia BI i CI z okręgiem dowodzimy, że również punkty X i Y leżą na okręgu opisanym na ABC, zatem na sześciokącie $ABCXYZ$ da się opisać okrąg. end{proof} end{enumerate} end{document}