** **
Zadania PDF.

Zadania przygotował Karol Kowalski

Źródło zadań w texu.

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} include{style} defcomment#1{}% [[#1]] } begin{document} section{Klasyfikacja trójek Pitagorejskich} begin{lem} Jeżeli liczby całkowite a,b,c spełniają $$a^2 + b^2 = c^2$$ to co najmniej jedna z liczb a,b jest parzysta. end{lem} Dowód: comment{przez kongruencje mod 4} begin{lem} Jeżeli liczby a,b,w,n są całkowite dodatnie, $NWD(a,b)=1$ oraz $$ab=w^n$$ to a,b są n-tymi potęgami liczb całkowitych, innymi słowy istnieją takie t,u całkowite dodatnie, że $$a=t^n, b=u^n$$ end{lem} Dowód: comment{przez rozkład na czynniki pierwsze} begin{thm} Liczby całkowite dodatnie a,b,c względnie pierwsze spełniają równanie $$a^2 + b^2 = c^2$$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $m>n$ całkowite dodatnie, że $$a=m^2 - n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$$ $$hbox{ lub }$$ $$a=2mn, b=m^2 - n^2, c=m^2+n^2$$ end{thm} begin{enumerate} item $Leftarrow$ Po pierwsze, jeżeli m,n z treści zadania istnieją to a,b,c są całkowite dodatnie i zachodzi $$a^2 + b^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = c^2$$ To kończy dowód implikacji w lewo comment{,,wtedy''}. item

$Rightarrow$. Załóżmy, że $a,b,cinmathbb{Z}_+$ spełniają $a^2+b^2=c^2$. item Liczby a,b,c są względnie pierwsze comment{czyli $NWD(a,b,c)=1$}, a więc dowolne 2 z liczb a,b,c są również względnie pierwsze. Faktycznie, załóżmy comment{rozumowanie przez zaprzeczenie} $NWD(a,b)>1$. Istnieje wtedy liczba pierwsza p, taka, że $$p|NWD(a,b)$$ czyli $p|a$ i $p|b$, a więc $p|a^2+b^2=c^2$, a skoro p jest pierwsza, to $p|c$ i $p|NWD(a,b,c)=1$. Sprzeczność. item Skoro a,b są względnie pierwsze, to przynajmniej jedna z nich jest nieparzysta. Z lematu wynika natomiast, że jedna z liczb a,b musi być parzysta. Załóżmy, że $2not|a$ comment{ze względu na symetryczność założeń i tezy możemy to założyć, ewentualnie zmieniając kolejność a,b}.\ Zauważmy, że $2not| a$ i $2|b$, więc $2not|c$ comment{bo spełniają równanie}, czyli $$2|c-a hbox{ i } 2|c+a$$ Istnieją więc k,l całkowite $c-a=2k$, $c+a=2l$.\ Jest $$b^2 = (c-a)(c+a) = 4kl$$ Skoro $2|b$ to możemy podstawić $b=2b'$, gdzie $b'inmathbb{Z}$: $$b'^2 = kl$$ Mamy $NWD(k,l) = frac{1}{2}NWD(c-a, c+a)=frac{1}{2}NWD(c+a,2a)=frac{1}{2}2=1$. comment{1. brzydkie przejście wynika z podstawienia k,l i z tego, że wiemy, że są one całkowite, 2. przejście wynika z algorytmu Euklidesa, 3. z tego, że $c-a$ i a są względnie pierwsze}\ comment{k,l są dość sztuczne, ale bardzo nie chciałbym operować ułamkami $frac{c-a}{2},frac{c+a}{2}$ które się za nimi kryją} Z lematu wiemy więc, że dla pewnych n,m jest $$k=n^2 hbox{ i } l=m^2$$ Jest więc $$b^2 = 4kl = 4m^2n^2 hbox{ stąd } b=2mn$$ $$2a = (c+a)-(c-a) = 2m^2 - 2n^2 hbox{ stąd } a=m^2 - n^2$$ $$2c = (c+a)+(c-a) = 2m^2 + 2n^2 hbox{ stąd } c=m^2 + n^2$$ Oczywiście $m>n$, gdyż $0 < a=m^2-n^2$. Dowód $Rightarrow$ jest więc zakończony. item Podany dowód klasyfikuje w zasadzie wszystkie trójki pitagorejskie, gdyż każda taka trójka powstaje przez pomnożenie trójki pitagorejskiej złożonej z liczb względnie pierwszych przez jakiś mnożnik. item Próba podsumowania - dlaczego właśnie tak dowodziliśmy?\ Poniższe rozumowanie NIE ma nic wspólnego z dowodzeniem, jest to tylko spekulacja, którą przekuć można w dowód. emph{Jeżeli teza jest prawdziwa}, to z tezy możemy wyliczyć $2m^2 = a+c$ i $2n^2 = a-c$, pozostaje więc udowodnić, że ułamki $frac{c+a}{2},frac{c-a}{2}$ są całkowite i są kwadratami liczb całkowitych. Tak właśnie przebiega dowód.   end{enumerate} end{document}