Przygotowana przez Aleksandrę Baranowską, Joachima Jelisiejewa i Karola Kowalskiego.

 PDF.

Źródło w texu (z linii komend kompilować 2. razy, aby zachować bibliografię).

documentclass[10pt]{article} usepackage{amssymb} usepackage{amsmath} textwidth 16cm textheight 24cm oddsidemargin 0cm topmargin 0pt headheight 0pt headsep 0pt usepackage[polish]{babel} usepackage[utf8]{inputenc} usepackage[T1]{fontenc} usepackage{ifthen} usepackage{graphics} usepackage[pdfborder={0 0 0}]{hyperref} %usepackage{MnSymbol} % --- vfuzz4pt % Don't report over-full v-boxes if over-edge is small hfuzz4pt % Don't report over-full h-boxes if over-edge is small % THEOREMS --- newtheorem{thm}{Twierdzenie}[section] newtheorem{cor}[thm]{Wniosek} newtheorem{lem}[thm]{Lemat} newtheorem{defn}[thm]{Definicja} newtheorem{tozs}[thm]{Tożsamość} newtheorem{hyp}[thm]{Hipoteza} newtheorem{useless}[thm]{} newcommand{HRule}{rule{linewidth}{0.5mm}} defsource#1{}%footnotesize Źródło: #1 normalsize} deflevel#1{}%textbf{Trudność} #1} defcomment#1{}% [[#1]] } defdeg{^{circ}} begin{document} %-- begin{titlepage} begin{center} % Upper part of the page includegraphics{micek-5cm.jpg}\[1cm] textsc{LARGE I Liceum Ogólnokształcące w Białymstoku}\[0.2cm] textsc{LARGE Podlaskie Stowarzyszenie na Rzecz Uzdolnionych}\[1.5cm] % Title HRule \[0.4cm] { huge bfseries Obóz Naukowy PROSERWY 2009}\[0.1cm] {Large bfseries Zadania matematyczne} HRule \[1.5cm] begin{minipage}{85mm} largeemph{Kadra obozu:}\ Aleksandra textsc{Baranowska}\ Iwona textsc{Bujnowska}\ Joachim textsc{Jelisiejew}\ Karol textsc{Kowalski} $ $\ $ $\ end{minipage}begin{minipage}{65mm} flushleftlarge {emph{Hymn:}}\ Kiedy Ci puszczają nerwy\ na PROSERWY, na PROSERWY!\ Nie smakują Ci konserwy?\ Na PROSERWY, na

PROSERWY!\ Tu zadania rób bez przerwy!\ Na PROSERWY, na PROSERWY!\ end{minipage} vfill % Bottom of the page {LARGE bfseries Serwy, 20 -- 26 września 2009} end{center} end{titlepage} setcounter{page}{2} %-- tableofcontents newpage section{Wstęp} W dniach 20 -- 26 września 2009 roku odbył się obóz matematyczno-informatyczny I Liceum Ogólnokształcącego w Białystoku im. Adama Mickiewicza. Poniżej prezentujemy zadania oraz wykłady z tego obozu. Zadania są w większości wzięte z ogólnodostępnych źródeł, wymienionych na końcu. Wykłady, z jednym zaznaczonym wyjątkiem, są autorstwa osób będących w kadrze obozu. newpage section{Zawody indywidualne} subsection{Grupa początkująca} begin{enumerate} item level{1} O podłogę i prostopadłą do niej ścianę stoi oparta drabina. Nóżki drabiny przesuwają się po podłodze (bez poślizgu) prostopadle do ściany i drabina obsuwa się. Na środku drabiny siedzi kotek (którego traktujemy jako punkt). Udowodnić, że w miarę opadania drabiny kotek zakreśli w przestrzeni łuk okręgu. source{Koło PTM} item level{2} Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita dodatnia n ma nieparzystą ilość dzielników (całkowitych dodatnich), to jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej. source{known} item level{3} W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Udowodnij, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1. source{I OMG} item level{2} Udowodnić, że trójkąt jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta. source{known} %for easy item level{2} Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej n. Obliczyć $S(S(S(2006^{2009})))$. source{known} item level{3} 2009 uczestników obozu naukowego stoi w serwerowni. Odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Każdy z nich ma jedną piłkę. Jednocześnie rzucają oni piłki, każdy najbliżej stojącemu uczestnikowi. Udowodnić, że pewien uczestnik nie dostanie piłki. source{Mathlinks} item level{1} Niech $ABCD$ będzie prostokątem, a punkt P będzie dowolny (leżący w płaszczyźnie $ABCD$). Udowodnić, że $$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$$source{known} item level{2} Funkcja $f:mathbb{R}rightarrow mathbb{R}$ przyjmuje stale wartości nieujemne. Ponadto zachodzi $$f(x+y)geq f(x) + f(y)$$ dla wszystkich $x,yinmathbb{R}$.\ Udowodnić, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $xinmathbb{R}$. source{Koło PTM} item level{3} Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. emph{Klockiem} nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami. source{L OM - 2. etap} item level{1} Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, takie, że również liczby $p+2$ i $p^2 + 2p + 4$ są pierwsze. source{Koło PTM} item level{2} Na płaszczyźnie ustalono dowolnie punkt A i okrąg o. Następnie wybrano punkt B leżący na okręgu o i punkt C taki, że BC jest średnicą o. Udowodnić, że liczba $|AB|^2 + |AC|^2$ nie zależy od wyboru punktu B. source{own} item level{3} Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, Q będzie środkiem odcinka AD, zaś F będzie rzutem B na CQ. Udowodnić, że $$|AB| = |AF|$$source{Mathlinks} item Karol i Ola, znudzeni wykładami Yogiego, poszli do sadu. Zebrali n czerwonych i m zielonych jabłek. Oczywiście czerwonych było więcej, gdyż każdy wie, że są lepsze. Pani Bujnowska piecze z nich ciasto takie, że :* jedno jabłko starcza tylko na jeden kawałek. Karol jest wielkim łakomczuchem, jednak nie lubi zielonych jabłek. Chce więc zjeść tyle kawałków, żeby mieć pewność, że co najmniej połowa z nich będzie zrobiona z czerwonych jabłek, ale nie chce się przejeść (zje minimalną liczbę kawałków spełniającą jego wymagania). Ile kawałków ciasta zostanie dla Oli?\ * Jeden kawałek zawiera dokładnie 1 całe jabłko, albo zielone albo czerwone.   item W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy podstawie ma miarę $75deg$. Udowodnij, że podstawa trójkąta ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na ABC.   item Liczby dodatnie a, b, c spełniają $a+b+c=1$. Udowodnij, że $$ab + bc + ca geq 9abc$$ end{enumerate}   subsection{Grupa olimpijska} begin{enumerate} item level{1} Liczby dodatnie a,b,c,d spełniają $abcd=1$. Udowodnić, że $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd geq 10$$source{Mathlinks} %na chama   item level{2} Rozstrzygnąć, czy istnieje czworościan, którego wszystkie ściany są przystające, ale nie jest on foremny.source{known}   item level{2-3} Udowodnij, że: begin{enumerate}   item Istnieje takie $ninmathbb{N}$, że wśród liczb ${n,n+1,n+2,dots, n+2009}$ nie ma liczby pierwszej,   item Istnieje takie $ninmathbb{N}$, że wśród liczb ${n,n+1,n+2,dots, n+2009}$ jest dokładnie 10 liczb pierwszych.   end{enumerate}source{Mathlinks} %ciaglosc   item level{1} Dane są liczby $a_1,a_2,dots,a_n$ takie, że $a_iin {1,-1}$ dla $i=1,2,dots,n$. Ponadto wiemy, że $$a_1a_2 + a_2a_3 + dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$ Udowodnić, że n jest podzielne przez 4.source{Koło PTM}   item level{1} Niech O_1,O_2 będą okręgami przecinającymi się w dwóch różnych puntkach M,N. Niech styczne do okręgów O_1,O_2 w M przecinają O_2 w B, O_1 w A odpowiednio. Niech AN przecina O_2 w C, zaś BN przecina O_1 w D. Udowodnić, że $$|AC| = |BD|$$source{Mathlinks} %katy   item level{2} Danych mamy ciąg 101 liczb rzeczywistych. Udowodnić, że można z niego wyjąć 11-wyrazowy podciąg niemalejący, lub 11-wyrazowy podciąg nierosnący.source{olimpiada radziecka}   end{enumerate} paragraph{Zadania z czwartku} begin{enumerate} setcounter{enumi}{6}   item Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$, o podstawach AB i CD, dla których $$|AC| = 1, |BD| = sqrt{3} hbox{ oraz } angle ABD = 30deg$$ Wyznacz najmniejszą możliwą sumę długości podstaw tego trapezu.source{Zwardoń}   item Wyznaczyć największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 2009.source{Zwardoń}   item Baran i Kaczor grają w następującą grę. Na początku na tablicy napisana jest liczba całkowita dodatnia n. W jednym ruchu gracz odejmuje od w napisanej w danym momencie na tablicy liczby jej dzielnik będący jedynką, liczbą pierwszą, lub iloczynem dwóch (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych i wynikiem odejmowania zastępuje wcześniejszą liczbę. Pierwszy ruch wykonuje Baran, a następnie gracze wykonują ruchy na przemian. Wygrywa gracz, który napisze na tablicy liczbę 0. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb n Baran może zapewnić sobie wygraną, niezależnie od ruchów Kozła. % begin{enumerate} % item Teza: Wygraną można zapewnić dla liczb niepodzielnych przez 8. % item Indukcja po n. % item Osiem przypadków $rightarrow$ udowodnić, że z podzielnej przez 8 można przejść tylko do niepodzielnej, a z niepodzielnej można zawsze przejść do podzielnej. % end{enumerate}source{Zwardoń} end{enumerate}   subsection{Zadania trudniejsze dla początkujących (fregaty)} begin{enumerate} item Niech a,b będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że $$a^2 + b^2 + 1 geq ab + a + b$$ source{Mathlinks}   item Trójkąt $triangle ABC$ jest wpisany w okrąg o. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w $triangle ABC$, a D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta $angle BAC$ z o innym niż A. Udowodnić, że D jest środkiem okręgu opisanego na $triangle BCI$. source{known}   item Ile jest różnych tablic $mtimes n$ wypełnionych liczbami ze zbioru ${1,-1}$ w taki sposób, że iloczyn liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu wynosi -1? source{Mathlinks}   item W trójkąt ABC wpisano okrąg, tak, że jest on styczny do boku AB w punkcie D. Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają punkt wspólny. source{known} end{enumerate}   subsection{Zadania trudniejsze dla olimpijczyków (pancerniki)} begin{enumerate} item Na obozie naukowym w Serwach uczestnicy rozwiązywać będą 2008 zadań. Na obóz ten kompletowana jest kadra. Powiemy, że osoba A jest emph{niegłupsza} od osoby B, jeżeli A potrafi rozwiązać wszystkie te zadania, które potrafi rozwiązać B. Powiemy, że osoba C jest w kadrze emph{zbędna}, jeżeli istnieje w kadrze inna osoba, która jest niegłupsza od C. Z ilu maksymalnie osób może składać się kadra, jeżeli wiadomo, że nie zawiera ona zbędnych osób? source{own}   item Pokazać, że jeżeli x,y,z są liczbami dodatnimi, to zachodzi: $$frac{sqrt{y+z}}{x} + frac{sqrt{x+z}}{y} +frac{sqrt{x+y}}{z} geq frac{3sqrt{6}}{sqrt{x+y+z}}$$ source{Staszic}   item Okrąg o środku w I jest wpisany w trójkąt $triangle ABC$ i jest styczny do AB, BC, CA w L, N, K odpowiednio. Punkt M jest środkiem odcinka AC, zaś punkt D leży na przecięciu KI i LN. Udowodnić, że punkty B, D, M są współliniowe.\ %emph{Wskazówka: Użyj teorii środka masy} source{Mathlinks}   item Wykazać, że jeżeli $a>3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, to dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $$a^{2^n} - 1$$ ma co przynajmniej $n+1$ różnych dzielników pierwszych. source{Koło PTM}   end{enumerate}   section{Mecz matematyczny} begin{enumerate}   item level{2-3} Liczby dodatnie a,b,c spełniają $abc=1$. Udowodnij, że $$frac{a}{b} + frac{b}{c} + frac{c}{a} geq a + b + c$$source{?} %podstawienie a=x/y   item level{2-3} Udowodnij, że dla liczb dodatnich a,b,c zachodzi $$frac{a}{b+c} + frac{b}{a+c} + frac{c}{a+b} leq frac{3}{2}frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab+bc+ca}$$source{Mathlinks} %dodawanie 1 do stron   %item level{2} Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym AB jest krótsze od pozostałych boków. Punkt D leży na boku AC i spełnia $|DA| = |AB|$. Punkt F jest taki, że $ADFB$ jest rombem, zaś K oznacza punkt przecięcia DF z BC. Obliczyć $displaystyle{frac{CK}{BK}}$.source{own}   item level{3} W kąt o wierzchołku X wpisano okręgi o_1,o_2. Okrąg s jest styczny zewnętrznie do o_1 w A i do o_2 w B. Udowodnić, że punkty A,B,X są współliniowe. Czy założenie, że s jest styczny emph{zewnętrznie} jest potrzebne?source{Staszic} %jednokladnosc   item level{2} Okrąg o środku w O został podzielony przez $n>2$ średnic na $2n$ przystających fragmentów. Pokazać, że rzuty dowolnego punktu $Mneq O$ należącego do wnętrza okręgu na te średnice są wierzchołkami n kąta foremnego.source{Staszic}   item level{2} Każdy punkt płaszczyzny jest pokolorowany jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wierzchołki są jednego koloru.source{Mathlinks} %palowanie   item level{1} 2009 uczestników obozu naukowego stoi w serwerowni. Odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Każdy z nich ma jedną piłkę. Jednocześnie rzucają oni piłki, każdy najbliżej stojącemu uczestnikowi. Udowodnić, że żaden uczestnik nie dostanie więcej niż 5 piłek.source{Mathlinks}   item level{2} Mamy daną tablicę $ntimes n$, której każde pole jest pokolorowane. Wiadomo, że żadne dwa rzędy nie są pokolorowane jednakowo. Udowodnić, że można wykreślić pewną kolumnę tak, że nadal żadne dwa rzędy nie będą pokolorowane jednakowo.source{Mathlinks}   item level{1} Niech M będzie liczbą całkowitą parzystą, $a_0,a_1,a_2,dots,a_{M-1}$ będą liczbami całkowitymi dającymi parami różne reszty z dzielenia przez M, a $c_i = a_i + i$ dla $i=0,1,2,dots,M-1$. Udowodnij, że istnieją takie $ineq j$ całkowite, że $c_i equiv c_j mod M$.source{Mathlinks}   item level{2} Wielomian $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + dots + a_0$ jest taki, że $a_iin {-1,1}$. Udowodnić, że nie ma on pierwiatków zawartych w $(-infty, -2] cup [2, infty)$.source{known}   item level{2} Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Niech $$frac{k}{l} = frac{1}{1} + frac{1}{2} + dots + frac{1}{p-1}$$ gdzie k,l są całkowite. Udowodnić, że $p|k$.source{known}   end{enumerate}   section{Wykłady} subsection{Okręgi i potęga punktu}   paragraph{Teoria} begin{enumerate} item emph{Kąt środkowy} w okręgu to kąt, którego wierzchołkiem jest środek danego okręgu. item emph{Kąt wpisany} w okrąg to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona zawierają cięciwy. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. item begin{thm} Jeżeli kąt środkowy i wpisany oparte są na tym samym łuku, to kąt środkowy ma miarę dwukrotnie większą, niż kąt wpisany.end{thm} item begin{thm} Kąt pomiędzy cięciwą i styczną przechodzącą przez koniec tej cięciwy równy jest połowie kąta środkowego opartego na tej cięciwie.end{thm} item begin{defn}Niech będzie dany okrąg o o środku w O i promieniu r oraz punkt A. Niech prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okrąg o w punktach B i C. Wtedy potęgą punktu A względem okręgu o nazywamy iloczyn $|AB| cdot |AC|$, jeżeli punkt A leży na zewnątrz okręgu i $-|AB| cdot |AC|$, jeżeli leży on wewnątrz. Iloczyn ten jest niezależny od wyboru prostej k. Potęga punktu A jest też równa $$|AO|^2 - r^2$$ end{defn} end{enumerate} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Trapez $ABCD$, w którym $AB || CD$ oraz $angle BCA = 90deg$ wpisano w okrąg o promieniu r. Punkt S jest środkiem podstawy AB. Udowodnić, że $|SD| = r$.   item Trójkąt ABC jest opisany na okręgu. Punkty K ,L, M są punktami styczności okręgu do boków AB, BC, CA odpowiednio. Wiedząc, że $angle KML = 40deg$ i $angle MKL= 60deg$, wyznacz kąty w trójkącie ABC. item Trapez $ABCD$, w którym $AB || CD$ oraz $angle ABC = alpha$, wpisano w okrąg o środku w S. Wiedząc, że $angle BAS = beta$, znajdź $angle DSC$.   item W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy podstawie ma miarę $75deg$. Udowodnij, że podstawa trójkąta ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na ABC.   item Używając oznaczeń z punktu piątego teorii, udowodnij, dla punktu A leżącego na zewnątrz o, że iloczyn $|AB| cdot |AC|$ jest niezależny od wyboru prostej.   item Wykaż, że jeżeli odcinki AB i CD przecinają się w E i zachodzi $|AE| cdot |BE| = |CE| cdot |DE|$, to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.   item Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $|MB| cdot |ME| = |MC| cdot |MF|$. Udowodnij, że zachodzi $|AE| cdot |AC| = |AF| cdot |AB|$. end{enumerate}   subsection{Warunki w nierównościach}   begin{enumerate} item Liczby dodatnie a,b spełniają $a+b = 1$. Udowodnić, że $$a^2 + b^2 geq frac{1}{2} hbox{ oraz } sqrt{a} + sqrt{b} leq sqrt{2}$$source{known}   item Liczby rzeczywiste a,b,c spełniają $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Udowodnić, że $$-frac{1}{2} leq ab + bc + ca leq 1$$source{known}   item Udowodnić, że jeżeli a,b,c są długościami boków trójkąta, to $$frac{a}{b+c-a} + frac{b}{a+c-b} + frac{c}{a+b-c}geq 3$$source{known}   item Niech a,b,c będą dodatnie i $abc=1$. Udowodnij, że $$ab+bc+ca geq 3$$source{known}   item Liczby $a_1,a_2,dots,a_n$ są dodatnie i takie, że $a_1a_2dots a_n =1$. Udowodnij, że $$(1+a_1)(1+a_2)dots(1+a_n)geq 2^n$$source{Koło PTMu}   item * Niech a,b będą liczbami dodatnimi, takimi, że $a+b = 1$. Udowodnić, że $$frac{a^2}{a+1} + frac{b^2}{b+1} geq frac{1}{3}$$source{Jungary 1996, Hoojoo Lee}   end{enumerate}   subsection{Zasada szulfadkowa Dirichleta} paragraph{Teoria} begin{thm}{Zasada szufladkowa Dirichleta} Jeżeli $n+1$ przedmiotów wkładamy do n szufladek, to w przynajmniej jednej szufladce będą przynajmniej 2 przedmioty.end{thm} paragraph{Zadania} begin{enumerate} item Mamy 25 jabłek, każde w jednym z 4 gatunków. Udowodnić, że można wybrać z nich 7 jabłek jednego gatunku. item Udowodnić, że wśród 50 osób pewne 8 urodziło się w tym samym dniu tygodnia. item Zakładając, że człowiek może mieć na głowie maksymalnie 150 tysięcy włosów wykazać, że w Białystoku (294 tysiące mieszkańców) pewne 2 osoby mają tyle samo włosów na głowie.   item W pokoju znajduje się 6 osób. Pewne osoby znają się ze sobą. Wykazać, że wśród tych sześciu osób są dwie o tej samej liczbie znajomych.   item Wykazac, że w zbiorze $n+1$ liczb całkowitych istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez n. item Przy okrągłym stole ma usiąść 2009 ambasadorów. Na stole poustawiano proporczyki z nazwiskami, a następnie posadzono przy stole ambasadorów, ale tak, że żaden nie siedział na swoim miejscu. Udowodnić, że można tak obrócić stół, żeby przynajmniej 2 ambasadorów siedziało na swoich miejscach. item Wykazać, że wśród naturalnych potęg 7 istnieje taka, której zapis dziesiętny kończy się na 01. end{enumerate} subsection{Klasyfikacja trójek pitagorejskich} begin{lem} Jeżeli liczby całkowite a,b,c spełniają $$a^2 + b^2 = c^2$$ to co najmniej jedna z liczb a,b jest parzysta. end{lem} Dowód: comment{przez kongruencje mod 4} begin{lem} Jeżeli liczby a,b,w,n są całkowite dodatnie, $NWD(a,b)=1$ oraz $$ab=w^n$$ to a,b są n-tymi potęgami liczb całkowitych, innymi słowy istnieją takie t,u całkowite dodatnie, że $$a=t^n, b=u^n$$ end{lem} Dowód: comment{przez rozkład na czynniki pierwsze} begin{thm} Liczby całkowite dodatnie a,b,c względnie pierwsze spełniają równanie $$a^2 + b^2 = c^2$$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $m>n$ całkowite dodatnie, że $$a=m^2 - n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$$ $$hbox{ lub }$$ $$a=2mn, b=m^2 - n^2, c=m^2+n^2$$ end{thm} begin{enumerate} item $Leftarrow$ Po pierwsze, jeżeli m,n z treści zadania istnieją to a,b,c są całkowite dodatnie i zachodzi $$a^2 + b^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = c^2$$ To kończy dowód implikacji w lewo comment{,,wtedy"}. item $Rightarrow$. Załóżmy, że $a,b,cinmathbb{Z}_+$ spełniają $a^2+b^2=c^2$. item Liczby a,b,c są względnie pierwsze comment{czyli $NWD(a,b,c)=1$}, a więc dowolne 2 z liczb a,b,c są również względnie pierwsze. Faktycznie, załóżmy comment{rozumowanie przez zaprzeczenie} $NWD(a,b)>1$. Istnieje wtedy liczba pierwsza p, taka, że $$p|NWD(a,b)$$ czyli $p|a$ i $p|b$, a więc $p|a^2+b^2=c^2$, a skoro p jest pierwsza, to $p|c$ i $p|NWD(a,b,c)=1$. Sprzeczność. item Skoro a,b są względnie pierwsze, to przynajmniej jedna z nich jest nieparzysta. Z lematu wynika natomiast, że jedna z liczb a,b musi być parzysta. Załóżmy, że $2not|a$ comment{ze względu na symetryczność założeń i tezy możemy to założyć, ewentualnie zmieniając kolejność a,b}.\ Zauważmy, że $2not| a$ i $2|b$, więc $2not|c$ comment{bo spełniają równanie}, czyli $$2|c-a hbox{ i } 2|c+a$$ Istnieją więc k,l całkowite $c-a=2k$, $c+a=2l$.\ Jest $$b^2 = (c-a)(c+a) = 4kl$$ Skoro $2|b$ to możemy podstawić $b=2b'$, gdzie $b'inmathbb{Z}$: $$b'^2 = kl$$ Mamy $NWD(k,l) = frac{1}{2}NWD(c-a, c+a)=frac{1}{2}NWD(c+a,2a)=frac{1}{2}2=1$. comment{1. brzydkie przejście wynika z podstawienia k,l i z tego, że wiemy, że są one całkowite, 2. przejście wynika z algorytmu Euklidesa, 3. z tego, że $c-a$ i a są względnie pierwsze}\ comment{k,l są dość sztuczne, ale bardzo nie chciałbym operować ułamkami $frac{c-a}{2},frac{c+a}{2}$ które się za nimi kryją} Z lematu wiemy więc, że dla pewnych n,m jest $$k=n^2 hbox{ i } l=m^2$$ Jest więc $$b^2 = 4kl = 4m^2n^2 hbox{ stąd } b=2mn$$ $$2a = (c+a)-(c-a) = 2m^2 - 2n^2 hbox{ stąd } a=m^2 - n^2$$ $$2c = (c+a)+(c-a) = 2m^2 + 2n^2 hbox{ stąd } c=m^2 + n^2$$ Oczywiście $m>n$, gdyż $0 3$ będzie liczbą naturalną, a liczby $x_1,x_2,dots,x_n$ będą dodatnie. Udowodnij, że $$sum_{i=1}^n frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} geq n$$ gdzie suma jest cykliczna, tj. $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$.source{OM} %dodawanie stałej end{enumerate} subsection{Równania funkcyjne} begin{enumerate} item Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}rightarrow mathbb{R}$ spełniające $$f(x+y) = f(x^2) + f(y^2)$$source{Warsztaty ILO 2005} item Funkcja f, określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0, przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste różne od 1. Ponadto $$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$ dla dowolnych $x,yneq 0$, oraz $$f(f(x)) = frac{1}{f(frac{1}{x})}$$ dla każdego $xnotin {0,1}$. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f.

source{Baltic Way 2007}   item Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość $$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$source{LIX OM, etap 2.}   item Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}rightarrowmathbb{R}$ takie, że $$x^2f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$ dla wszystkich $xin mathbb{R}$.source{Excalibur}   item Znajdź wszystkie funkcje $f:mathbb{Q}rightarrow mathbb{Q}$ spełniające równanie $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$ dla wszystkich $x,yin mathbb{Q}$.source{Excalibur}   item Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}rightarrow mathbb{R}$ spełniające równanie $$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$source{V LO w Krakowie}   item Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}rightarrow mathbb{R}$ różnowartościowe oraz spełniające równanie $$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$$source{V LO w Krakowie}   item Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}rightarrowmathbb{R}$ spełniające równanie $$f(x+y) - f(x-y) = 4xy$$source{własne}   item Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}rightarrowmathbb{R}$ spełniające równanie $$(x-y)f(x+y) + (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$source{V LO w Krakowie}   item Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:mathbb{R}backslash{0,1}rightarrow mathbb{R}$ spełniające dla $xin mathbb{R}backslash{0,1}$ zależność $$f(x) + fleft(frac{1}{1-x}right) = x$$source{Koło PTM}   end{enumerate}   subsection{Miejsca geometryczne}   begin{enumerate} item O podłogę i prostopadłą do niej ścianę stoi oparta drabina. Nóżki drabiny przesuwają się po podłodze (bez poślizgu) prostopadle do ściany i drabina obsuwa się. Na środku drabiny siedzi kotek (którego traktujemy jako punkt). Udowodnić, że w miarę opadania drabiny kotek zakreśli w przestrzeni łuk okręgu. source{Koło PTM}   item emph{Miejsce geometryczne} -- w geometrii zbiór punktów spełniających zadany warunek, np. pewna kula może być zdefiniowana jako miejsce geometryczne punktów odległych nie bardziej niż o r od środka układu współrzędnych. source{wikipedia}   item Na płaszczyźnie dane są punkty A,B. Udowodnić, że miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny równoodległych od A,B jest prosta prostopadła do odcinka AB i przechodząca przez jego środek. comment{I stąd wynika jednoznaczność okręgu opisanego na trójkącie} source{known}   item W przestrzeni dane są punkty A,B. Udowodnić, że miejscem geometrycznym punktów przestrzeni trójwymiarowej równoodległych od A,B jest płaszczyzna prostopadła do odcinka AB i przechodząca przez jego środek. comment{I stąd wynika jednoznaczność sfery opisanej na czworościanie} source{known}   item Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Udowodnić, że zbiorem punktów równoodległych od prostych AC i BC jest para prostych prostopadłych, przecinających się w C. Jak jest w przypadku przestrzennym? comment{I stąd okrąg wpisany w trójkąt i dopisany do trójkąta} source{known}   item emph{Okrąg Apoloniusza} Na płaszczyźnie dane są różne punkty A,B oraz liczba dodatnia k. Udowodnić, że zbiór punktów X płaszczyzny, spełniających $$frac{AX}{BX} = k$$ jest begin{itemize} item okręgiem, jeżeli $kneq 1$, item symetralną AB, jeżeli $k=1$. end{itemize} source{known}   item Niech o będzie okręgiem Apoloniusza dla danych $A,B,kneq 1$ przy czym punkt A leży na zewnątrz o. Z punktu A poprowadzono styczne AP,AQ do okręgu o. Udowodnić, że B jest środkiem odcinka PQ. source{Prasolow}   item W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od $180deg$ oraz zachodzi równość $$AB cdot CD = AD cdot BC$$ Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnić, że $angle PCB = angle ACD$. source{LVII OM}   item * Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym AB i CD nie są równoległe. Niech $mathcal{X}$ będzie zbiorem punktów X takich, że $[XAB] + [XCD] = frac{1}{2}[ABCD]$, gdzie $[mathcal{Y}]$ oznacza pole figury $mathcal{Y}$. Znaleźć $mathcal{X}$. source{Prasolow}   end{enumerate}   subsection{Metoda ekstremum} begin{enumerate} item Materiały wzięte z url{http://www.mimuw.edu.pl/~sem/konferencja-kmp2008/materialy/guzicki.pdf} (9 zadań) end{enumerate} subsection{Kurs trudnego udowadniania liniowości układów :)} begin{enumerate} item Materiały na url{http://21wdw.staszic.waw.pl/ktulu/} end{enumerate} newpage begin{thebibliography}{} bibitem{} Baltic Way 2007 url{http://www.balticway07.dk/} bibitem{} Hojoo Lee ,,Topics In Inequalities'' url{http://compactorange.googlepages.com/tin2006new.pdf} bibitem{} International Mathematical Olympiad url{http://www.imo-official.org/} bibitem{} Koło matematyczne Podlaskiego Oddziału PTM url{http://www.ptm.pb.bialystok.pl} bibitem{} Koło matematyczne V LO w Krakowie bibitem{} Koło matematyczne XIV LO im. Staszica w Warszawie url{http://wm.staszic.waw.pl/} bibitem{} Obóz matematyczny OM w Zwardoniu url{http://www.om.edu.pl/} bibitem{} Olimpiada Matematyczna url{http://www.om.edu.pl/} bibitem{} Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów url{http://www.omg.edu.pl/} bibitem{} Mathematical Excalibur url{http://www.math.ust.hk/excalibur/} bibitem{} Podlaski Konkurs Matematyczny url{http://www.ptm.pb.bialystok.pl} bibitem{} Portal Mathlinks url{http://www.mathlinks.ro/} bibitem{} V. V. Prasolov ,,Plane Geometry'' %url{http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf} end{thebibliography} flushright footnotesize Sporządził Joachim Jelisiejew v1.1 newpage $ $ end{document}