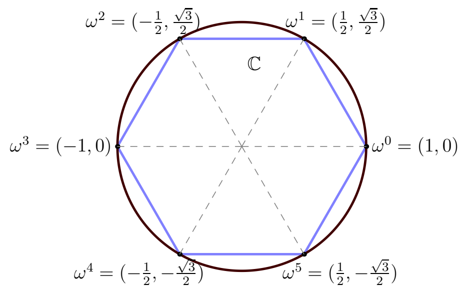

Pooemowe kółko

1.1 Trochę teorii

1. **Definicja (Liczba zespolona)** *Liczba zespolona to liczba postaci*

$$z = a + b\mathbf{i}$$

gdzie a, b *rzeczywiste, a* $\mathbf{i}$ *to jednostka urojona, spełniająca* $\mathbf{i}^2 = -1$. *Liczbę* a *nazywamy* częścią rzeczywistą z *i oznaczamy* $\operatorname{Re} z$, *liczbę* b *nazywamy* częścią urojoną z *i oznaczamy* $\operatorname{Im} z$ *(oznaczenia od ang. Real and Imaginary).*

2. Mówimy, że liczba zespolona jest *rzeczywista*, jeżeli $b = 0$ a *czysta*, albo *urojona*, jeśli $a = 0$.

3. Na liczbach zespolonych określamy działania:

$$(a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i}) = (a + c) + (b + d)\mathbf{i}$$

$$-(a + b\mathbf{i}) = -a - b\mathbf{i}$$

$$(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd\mathbf{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$$

$$\frac{1}{a + b\mathbf{i}} = \frac{a - b\mathbf{i}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathbf{i}$$

Mnożenie jest przemienne i w ogóle wszystko jest "normalne".

4. **Definicja (Sprzężenie)** *Dla* $z = a + b\mathbf{i}$ *liczbę*

$$a - b\mathbf{i}$$

nazywamy sprzężeniem z *i oznaczamy* $\overline{z}$. *Operacja* $z \to \overline{z}$ *to odbicie względem osi* OY, *nic dziwnego więc, że gra ona dobrze z dodawaniem i mnożeniem:*

$$\overline{a \pm b} = \overline{a} \pm \overline{b}, \quad \overline{ab} = \overline{a}\overline{b}, \quad \overline{1/a} = 1/\overline{a}$$

5. **Definicja (Moduł)** *Liczbę (rzeczywistą!)* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *nazywamy* modułem *liczby* z *i oznaczamy* $|z|$; *liczba* $\overline{z}$ *ma taki sam moduł:* $a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$. *Ponadto zachodzi*

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Moduł jest interpretowany, podobnie jak wartość bezwzględna w $\mathbb{R}$, *jako odległość od* 0.

6. **Obserwacja (Interpretacja geometryczna)** *Liczbę zespoloną* $a+b\mathbf{i}$ *możemy utożsamiać z punktem płaszczyzny* (a, b), *łatwo wtedy widać, że* $|z|$ *jest odległością od* 0 *tej liczby. Niech* α *będzie kątem pomiędzy osią* OX *o prostą przechodzącą przez* $(0, 0)$ *i* (x, y). *Wtedy*

$$z = |z|(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)$$

7. **Twierdzenie (Podstawowa metoda)** *Pomijając warstwę formalną, liczby zespolone zadają nam mnożenie punktów płaszczyzny, więc dodatkową operację, sprawiającą, że wiele przekształceń, zwłaszcza obroty, daje się zapisać "naturalniej" przez mnożenie.*

1.2 Techniczne

1. * Udowodnij, że $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 0$ (tylko 0 jest w odległości 0 od 0 ◡̈).
2. * Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że $z = \overline{z}$ i wszystkie takie, że $z = -\overline{z}$.
3. * Stwierdź, jaką figurę opisuje równanie $|z - r| = s$, dla r, s ustalonych, s rzeczywistego dodatniego.
4. * Udowodnij

   Twierdzenie (Wzór de Moivre)

   $$(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha+\beta).$$

5. * Uzasadnij, że przekształcenie $z \to (\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)z$ to obrót o kąt α wokół 0. Jak zapisać wzorem obrót wokół dowolnego punktu?

1.3 Geometryczne

1. * Zadanie
   Załóżmy, że liczby $a, b \in \mathbb{C}$ leżą na okręgu jednostkowym. Pokazać, że
   (a) Punkt $\frac{a+b}{2}$ to środek odcinka ab,
   (b) Punkt $\sqrt{ab}$ to środek łuku arc ab,
   (c) Punkt $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ to punkt przecięcia stycznych do okręgu jednostkowego w a i b.

2. * Zadanie
   Na bokach AC i BC trójkąta $\triangle ABC$ wybudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty prostokątne równoramienne $\triangle ACY$ i $\triangle BCX$ (katy proste przy wierzchołkach X, Y). Uzasadnić, że punkt M — środek boku AB oraz punkty X, Y tworzą trójkąt prostokątny równoramienny.

3. * Zadanie
   Na bokach trójkąta $\triangle ABC$, po zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty równoboczne $\triangle BCX$, $\triangle CAY$, $\triangle ABZ$. Udowodnić, że środki ciężkości tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny.

4. * Zadanie
   Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Na jego bokach zbudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty prostokątne równoramienne $\triangle ABP, \triangle BCQ, \triangle CDR$ i $\triangle DAS$ o kątach prostych odpowiednio przy wierzchołkach P, Q, R, S. Wykazać, że odcinki PR i QS są prostopadłe i równej długości.

5. * Zadanie
   Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym trójkąty BCP i DAP są równoboczne. Na bokach AB i CD tego czworokąta zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ABK i CDL. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABK i CDL pokrywają się.