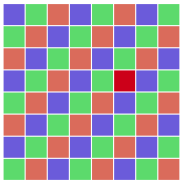

I kombinatoryka domowa.

Joachim Jelisiejew, wersja druga
na 10 stycznia 2012

W razie gdyby były wątpliwości piszcie, proszę. Możliwe są również dodatkowe wskazówki do rozwiązania. Jeżeli spisujecie już rozwiązanie i stwierdziliście, że coś nie gra — napiszcie wyraźnie, że nie rozumiecie tego miejsca.
Wydaje mi się, że to zadanie może być interesujące w zastosowaniach, ale niestety nie zostało wzięte z literatury (i niestety jest trudne — naprawdę piszcie, jeżeli wskazówki będą potrzebne). Uwaga: po raz pierwszy istnieje ryzyko, że rozwiązanie jest ściemą, co prawda niezamierzoną — jestem zmęczony :(.

Zadanie 1

Rozważmy szachownicę $N \times M$ z polami o współrzędnych od $(1,1)$ do (N,M) z wyciętym polem o współrzędnych (x,y), gdzie $1 \leqslant x \leqslant N, 1 \leqslant y \leqslant M$.

Niech $n \geqslant 3$. Udowodnić, że szachownicę da się pokryć klockami $1 \times n$ (położonymi pionowo lub poziomo) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków

1. n dzieli każdą z liczb $N-1, M-1, x-1, y-1$,
2. n dzieli każdą z liczb $N+1, M+1, x, y$.

Rozwiązanie.

W rozwiązaniu trzeba ustalić, co oznacza "rząd" a co "kolumna".

- Pokaż, że gdy zachodzi jeden z warunków, szachownicę da się pokryć klockami (tworzącymi cztery duże prostokąty).
- Niech $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)$ — permutacje $(1, 2, \ldots, n)$. *Kolorowanie* to zapis $a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots$ w pierwszej kolumnie, a potem w rzędach $b_1, \ldots, b_n, b_1, \ldots$ rozpoczynając od odpowiedniej liczby (wpisanej w pierwszej kolumnie).
- Uzasadnij, że każdy klocek jest pokryty liczbami tworzącymi zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$, więc suma liczb w tablicy (minus liczba na polu wyciętym) jest podzielna przez $1 + 2 + \ldots + n$.
- Załóżmy, że rząd z wyciętym polem zaczyna się od a_i, rząd poprzedni od a_j.

  Rozważ kolorowanie permutacjami $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)$. Wywnioskuj, że pole wycięte ma inną liczbę wpisaną, więc żeby suma zgodziła się rzędów zaczynających się od a_i i a_j musi być różna liczba.
- Niech rząd następny zaczyna się od a_k. Uzasadnij, że rzędów zaczynających się od a_k i a_i jest różna liczba.
- Wywnioskuj, że od a_i zaczyna się pierwszy i ostatni rząd lub rzędy te zaczynają się od a_k i a_j.
- Wywnioskuj, że stąd wynika odpowiednio $n \big| M-1, y-1$ lub $n \big| M+1, y$.
- Wywnioskuj $n \big| N-1, x-1$ lub $n \big| N+1, x$.
- Wywnioskuj tezę, eliminując dwie niemożliwe kombinacje (pole…).