Pisemne I

Joachim Jelisiejew

na 12 grudnia 2011

Trochę późno; za to bez ściem po drodze. Poniższe rozumowanie należy traktować jako wskazówki: może ono być niekompletne, a z czasem (choć nie teraz) może stać się błędne, sprzeczne ze sobą w niektórych miejscach itp. Tym niemniej będę starać się konstruować je tak, aby znacznie ułatwiało rozwiązanie.

Zadanie (WTF dla $n = 4$) 1
Udowodnij, że równanie

$$x^4 + y^4 = z^2$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Rozwiązanie.

- **Lemat 1.1** (Klasyfikacja trójek Pitagorejskich)**.** *Jeżeli liczby całkowite a, b, c spełniają zależność $a^2 + b^2 = c^2$ to istnieją takie m, n całkowite, że*

  $$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2 \text{ lub } a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2.$$

  Źródło: Sierpiński "Teoria Liczb".

- Wybieramy najmniejsze(?) rozwiązanie równania z zadania.
- x, y, z względnie pierwsze.
- Piszemy $x^2 = m^2 - n^2, y^2 = 2mn, z = m^2 + n^2$.
- Piszemy $n = 2n_1^2, m = m_1^2$.
- Piszemy $x = \alpha^2 - \beta^2, n = 2\alpha\beta, m = \alpha^2 + \beta^2$.
- Piszemy $\alpha = \alpha_1^2, \beta = \beta_1^2$.
- Rozwiązanie $\alpha_1^4 + \beta_1^4 = m_1^2$ jest mniejsze od wyjściowego.