

Trening przed PTMem

1. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią, to

$$2 \mid \binom{2n}{n}$$

2. Wyznaczyć ilość piątek liczb (a, b, c, d, e) liczb całkowitych dodatnich, spełniających nierówność

$$a + b + c + d + e \leq 2009$$

Uwaga: Pomyłki numeryczne przy obliczaniu wyniku nie będą mocno karane, ale trzeba uzyskać liczbowy wynik.

3. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$6abc \leq ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

4. Niech $ABCD$ będzie trapezem, w którym $AD \parallel BC$ i $|AB| = |CD|$, wpisanym w okrąg o . Niech M będzie środkiem boku AD , zaś E będzie punktem przecięcia prostej BM z okręgiem o , innym niż B . Dowieść, że

$$|AM|^2 = |MC| \cdot |ME|$$