Warsztaty - kombinatoryka

Teoria

1. Udowodnić, że ilość wyboru n-elementowego ciągu ze zbioru $(1, 2, \cdots, n)$ (każdy element wybrany najwyżej raz) to $n!$.
2. Udowodnić, że ilość wyboru k-elementowego ciągu ze zbioru $(1, 2, \cdots, n)$ (każdy element wybrany najwyżej raz) to $\frac{n!}{(n-k)!}$.
3. Udowodnić, że ilość wyboru k-elementowego ciągu ze zbioru $(1, 2, \cdots, n)$ (każdy element wybrany najwyżej raz) to $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
4. **Symbol Newtona** Niech n, k będą całkowite nieujemne. Wtedy definiujemy symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ jeżeli } n \geq k$$

$$\binom{n}{k} := 0 \text{ jeżeli } n < k$$

Własności

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ i } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

5. Do k rozróżnialnych pojemników wrzucamy n nierozróżnialnych piłeczek. Udowodnić, że możemy to zrobić na

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

sposobów

Zadania

1. Udowodnić, że

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

2. Udowodnić, że

$$\binom{n}{0}2^n + \binom{n}{1}2^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}2^0 = 3^n$$

3. Udowodnić, że dla $n > 0$

$$\binom{n}{0}(-1)^n + \binom{n}{1}(-1)^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}(-1)^0 = 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$$

w ostatniej sumie sumujemy dopóki dolny indeks jest niewiększy od górnego.

4. (nieomawiane) Udowodnić, że

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

5. Udowodnić, że liczba pokryć prostokąta $2 \times n$ prostokątami 1×2 i 2×1 jest równa F_{n+1} gdzie ciąg (F_n) jest dany wzorem

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

6. W turnieju piłkarskim uczestniczy n zespołów. Każdy z każdym rozgrywa jeden mecz. Rozgrywki odbywają się w k miastach. Udowodnić, że pewne 3 zespoły rozegrają wszystkie mecze między sobą w jednym mieście, dla

   (a) $n = 6, k = 2$

   (b) (nieomawiane) $n = 18, k = 3$

   źródło: www.ptm.pb.bialystok.pl

7. Z pola E1 do pola E8 szachownicy król może dojść w siedmiu ruchach. Na ile sposobów może to zrobić? źródło: www.ptm.pb.bialystok.pl

8. Udowodnić, że jeżeli mamy 101 liczb całkowitych, to wśród nich są dwie, których różnica jest podzielna przez 100.

9. Udowodnić, że jeżeli wybierzemy $n + 1$ różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ to wśród nich są dwie

   (a) których suma jest równa $2n + 1$

   (b) które są względnie pierwsze.

10. Niech $a_1, a_2, \cdots, a_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieją takie $1 \leq k \leq l \leq n$, że $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$ jest podzielne przez n.