Kółko 16.04 - różne prostsze zadanka

Proste wielomiany

1. Wykazać, że równanie
$$17x^2 + 95xy + 2000y^2 - 2005 = 0$$
nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y.

2. Wykazać, że jeżeli dla niezerowych liczb rzeczywistych a, b, c, x, y, z zachodzi
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ i } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$$
to
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. Czy wielomian $x^4 + 1$ da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego? A stopnia 2?

4. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych
$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_0$$
ma n pierwiastków rzeczywistych. Oblicz jego współczynniki. źródło: któryś prastary OM

5. * Dane są takie niezerowe liczby całkowite a, b, c, że $a + b + c = 0$. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest podzielność
$$a^2 + b^2 + c^2 | a^{n^2+1} + b^{n^2+1} + c^{n^2+1}$$
źródło: Zwardoń 2007

Różne

1. Udowodnij, że liczby $1, 2, \cdots, n^2$ można rozbić na n podzbiorów o równych sumach.

2. *przypomnienie* Jeżeli a, b, c - całkowite dodatnie i $a^2 + b^2 = c^2$, to wśród liczb a, b, c istnieje co najmniej jedna podzielna przez 3, co najmniej jedna podzielna przez 4 i co najmniej jedna podzielna przez 5.

3. * Niech liczby a, b, c będą całkowite dodatnie, względnie pierwsze, czyli $NWD(a, b, c) = 1$ i spełniają równanie Pitagorasa:
$$a^2 + b^2 = c^2$$
Udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n, że
$$a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2 \text{ lub } a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2$$