



Walcz z układem! (równań) 2

JOACHIM JELISIEJEW
3 STYCZNIA 2012

1.1 “Pólniezmienniki”

Częste, choć na razie nie na II etapie OM, są układy postaci $y = f(x), z = f(y), x = f(z)$, gdzie f jest pewną funkcją. Zwykle podstawianie niewiele tu daje. Trzeba zgadnąć rozwiązania i pokazać pewną własność f , która sprawia, że innych nie ma. Tutaj zwykle b. ważne są nierówności i wartość bezwzględna.

ZADANIE 1

Znajdź wszystkie czwórki liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d spełniające układ równań

$$\begin{cases} a = 2b^2 - 1 \\ b = 2c^2 - 1 \\ c = 2d^2 - 1 \\ d = 2a^2 - 1. \end{cases}$$

Wskazówka: Połóż $f(x) = 2x^2 - 1$. *Narysuj wykres! Porównaj $|f(x)|$ i $|x|$ w zależności od x .*

ZADANIE 2

Liczby x_1, \dots, x_{2011} są rzeczywiste dodatnie i spełniają układ równań

$$\begin{cases} x_1^{x_2} = x_3 \\ x_2^{x_3} = x_4 \\ \dots \\ x_{2011}^{x_1} = x_2. \end{cases}$$

Wyznacz te liczby.

ZADANIE 3

Udowodnij, że jeśli równanie $ax^5 + bx^4 + c = 0$, gdzie $ac \neq 0$ ma trzy różne rozwiązania x_1, x_2, x_3 , to równanie $cx^5 + bx + a = 0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

ZADANIE 4

Rozwiązać równanie

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 = ab - ac + 2bc$$

w liczbach rzeczywistych a, b, c .

Wskazówka: od czego jest sensownie zacząć?

ZADANIE 5

Znajdź wszystkie trójki (x, y, z) liczb większych od 1 spełniające równanie

$$x + y + z + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{y-1} + \frac{3}{z-1} = 2(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2}).$$

Wskazówka (lub zdziwko) dla patujących: jeżeli wielomian f jest stale nieujemny i $f(a) = 0$ to $f'(a) = 0$, więc $NWD(f, f')(a) = 0$ (to było na Serwach).

ZADANIE OBLICZENIOWE 6

Znajdź pierwiastek następujących wielomianów wiedząc, że wielomiany te są stale nieujemne

- $x^4 - 11x^3 - 7x^2 + 176x + 576$,
- $x^6 - x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.