Mix teorio-liczbowy I

kółko I LO Białystok
25 października 2013

Zadania wzięte m.in. ze Staszica i kółka uniwersyteckiego z Zielonej Góry. Dziękuję!

Teoria na dziś: małe twierdzenie Fermata i tw. chińskie o resztach. Ale przydają się tylko w niektórych zadaniach :)

Zadanie 1
Znajdź wszystkie x rzeczywiste, spełniające równanie $4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 31 = 0$.
Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Zadanie 2
Jaką resztę z dzielenia przez 21 daje liczba $2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}$?

Zadanie 3
Udowodnij, że liczba 513^2 dzieli liczbę $514^{514} - 514^2 + 514 - 1$.

Zadanie 4
Wskaż największą liczbę naturalną D taką, że dzieli ona liczbę $n^6 - n^2$ dla dowolnego n naturalnego.

Zadanie 5
Liczba pierwsza p dzieli liczbę $\underbrace{11\ldots11}_{p\text{ jedynek}}$. Uzasadnij, że $p = 3$.

Zadanie 6
Scharakteryzuj liczby naturalne niewystępujące w ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$, gdzie $a_n = n + \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Zadanie 7
Liczby a, b, c, d, e, f są całkowite dodatnie. Udowodnij, że jeśli $a^3 + b^3 = c^3 + d^3 = e^3 + f^3$, to liczba $a + b + c + d + e + f$ jest złożona.

Zadanie 8
Czy wśród liczb $10^n + 3$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych?

Zadanie 9
Czy istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej 2013 różnych dzielników?
Wskazówka: chińskie twierdzenie o resztach.

Zadanie 10
Czy istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej 2013 różnych dzielników pierwszych?