

Kółko 6.1 - teoria liczb

Zadania, nieco łatwiejsze na rozruszanie.

1. Rozstrzygnij, czy $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$.
2. Oszacuj z góry $d(n)$, w zależności od n i wywnioskuj z tego oszacowania, że ciąg dany wzorem $a_0 = a$, $a_{n+1} = d(a_n) + b$ zapętla się dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_+$.
3. Udowodnij, że jeśli $n \geq 3$, to $(n+1)^n < n^{n+1}$.
4. Oszacuj z góry $\binom{n}{k}$ w zależności od n (i od k , jeżeli potrafisz).
5. Oszacuj z góry iloczyn wszystkich liczb pierwszych z przedziału $(n, 2n]$, w zależności od n .
6. Udowodnij, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $n!$ liczba pierwsza p występuje $\sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ i spróbuj stąd obliczyć np. kiedy $\binom{n}{k}$ jest parzysty.
7. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba postaci $99 \cdots 900 \cdots 0$ podzielna przez 2009^4 .
8. * (Przekleństwo Łukasza) Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają równość $ad = b^2 + bc + c^2$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nie jest liczbą pierwszą.