Symetria

1.1 *Niezmienniczość

*Sekcja jest oznaczona * ze względu na to, że nie było na kółku potrzebnych definicji, ale np. zadania 1,2 nie są aż tak trudne, żeby zasłużyć na *.*

Poniższe zadania są mało kółkowe, więc mogą łatwo zasłużyć na zarzut nieżyciowości. Wręcz przeciwnie – część jest całkiem ważnymi wynikami!

1. Zadanie
   Niech liczby a, b, c będą dodatnie i załóżmy, że mamy nierówność

   $$f(a,b,c) \geq g(a,b,c) \text{ dla wszystkich } a,b,c > 0$$

   gdzie f, g są pewnymi funkcjami.

   Uzasadnić, że jeśli f jest symetryczna, to istnieje taka funkcja symetryczna h, że

   $$f(a,b,c) \geq h(a,b,c) \text{ dla wszystkich } a,b,c > 0$$

   oraz $h(a,a,a) = g(a,a,a)$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}_+$.

   Funkcja jest symetryczna, jeżeli zamiana kolejności argumentów nie wpływa na jej wartość.

2. Zadanie
   Punkty $X_1, \ldots, X_n$ są takie, że symetria względem symetralnej dowolnego z odcinków X_iX_j nie zmienia zbioru $\{X_1, \ldots, X_n\}$ (tzn. przerzuca punkty tego zbioru na punkty tego zbioru). Uzasadnij, że wszystkie punkty leżą na jednym okręgu.

3. Zadanie
   Wymaga znajomości pojęcia granicy...

   Uzasadnić, że jeśli ciąg (x_n) zdefiniowany w sposób

   $$x_0 = 0.5, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{3}$$

   ma granicę, to jest nią 0.

4. Zadanie
   Rozważmy wielomiany zmiennych x, y o współczynnikach rzeczywistych.

   Wielomian nazywamy symetrycznym, jeżeli funkcja przez niego zdefiniowana jest symetryczna. Uzasadnij, że wszystkie wielomiany symetryczne są sumami wielomianów postaci

   $$\text{współczynnik} \cdot (xy)^i (x+y)^j$$

   gdzie i, j – całkowite nieujemne.

   Wskazówka: zastosuj indukcję po stopniu.

   Analogiczny fakt (z $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz) zachodzi również dla 3 zmiennych i chyba nawet jest w naszym zasięgu, ale jest bardziej mozolny.