Stereo

(a miejscami nawet surround)

30 stycznia 2014

To kółko wiele zawdzięcza niezrównanym artykułom Michała Kiezy z „Kącika Przestrzennego” Delty. Oprócz tego zadania pochodzą z OMów oraz prezentacji Adama Osękowskiego. Prawdopodobnie są w nich literówki (albo i gorzej). Gdyby ktoś coś zobaczył, proszę o informację na maila; poprawię.

Punkty wyróżnione ⋆

W tym akapicie dany jest czworościan $ABCD$. Skonstruujemy trzy (nie cztery) punkty wyróżnione tego czworościanu: środek ciężkości, środek sfery opisanej i wpisanej. Niekoniecznie trzeba umieć uzasadnić konstrukcje, ale czasami warto je znać.

Wskazówka do wszystkich dowodów: jak się dowodzi istnienia na płaszczyźnie?

Zadanie 1
Uzasadnij, że czterech odcinków łączących wierzchołki ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w jednym punkcie M. Nazywamy go *środkiem ciężkości* czworościanu.

Zadanie 2
Uzasadnij, że sześć płaszczyzn symetralnych do krawędzi czworościanu przecina się w jednym punkcie O. Nazywamy go *środkiem sfery opisanej* na czworościanie. Uzasadnij, że zaiste istnieje (jedyna) sfera przechodząca przez punkty $ABCD$ o środku w O.

Zadanie 3
Płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego (tzn. kąta pomiędzy dwoma półpłaszczyznami) to zbiór punktów równoodległych od tych płaszczyzn, leżących wewnątrz kąta. Uzasadnij, że sześć płaszczyzn dwusiecznych kątów pomiędzy ścianami czworościanu przecina się w jednym punkcie I. Nazywamy go *środkiem sfery wpisanej* w czworościan. Uzasadnij, że zaprawdę istnieje (jedyna) sfera styczna do ścian czworościanu $ABCD$ o środku w I.

Proste prostopadłe

Kluczowe są następujące dwie uwagi

1. jeżeli dwie nierównoległe proste m_1, m_2 leżące w danej płaszczyźnie są prostopadłe do prostej ℓ, to cała płaszczyzna zawierająca m_1 i m_2 jest prostopadła do ℓ.
2. jeżeli prosta ℓ jest prostopadła do płaszczyzny π, to jest prostopadła do dowolnej prostej z tej płaszczyzny.

Zadanie 4 Twierdzenie o trzech prostopadłych, ważne!
Dany jest punkt A i prosta ℓ leżąca na płaszczyźnie π. Niech H oznacza rzut A na π. Udowodnij, że rzuty punktów A i H na prostą ℓ pokrywają się.

Zadanie 5
Dane są odcinki CD i AB. Uzasadnij, że $CD \perp AB$ wtedy i tylko wtedy, gdy rzuty C i D na AB pokrywają się.

Zadanie 6
Wszystkie kąty przy wierzchołku A czworościanu $ABCD$ są proste. Wykaż, że rzut H punktu A na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD.

Zadanie 7 ważne!
Uzasadnij, że proste l i m leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy są równoległe lub przecinają się.

Zadanie 8
Dany jest czworościan $ABCD$. Wykaż, że jeżeli wysokości poprowadzone z punktów A i B tego czworościanu przecinają się, to proste AB i CD są prostopadłe.

Zatem ogólnie w czworościanie wysokości nie przecinają się w jednym punkcie — niekoniecznie istnieje ortocentrum.

Zadanie 9
Krawędź AD czworościanu $ABCD$ jest prostopadła do płaszczyzny ABC. Uzasadnij, że rzut ortocentrum trójkąta ABC na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD.

Równość stycznych i ulubiony lemat MK

Poniższe twierdzenie jest kluczowe w stereometrii. Warto przeanalizować wszystkie dowody, by przy okazji nauczyć się pożytecznych rzeczy.

Twierdzenie 1 (Najmocniejsze twierdzenie stereometrii, ważne!). *Niech o będzie sferą, a P dowolnym punktem poza kulą, której brzegiem jest o. Wtedy wszystkie styczne z P do o mają równe długości.*

I dowód. Niech O oznacza środek sfery, r jej promień, zaś X będzie dowolnym punktem styczności. Wtedy trójkąt PXO jest prostokątny i z twierdzenia Pitagorasa $PX = \sqrt{PO^2 - XO^2} = \sqrt{PO^2 - r^2}$. Wartość tego wyrażenia nie zależy od punktu X. □

II dowód. Niech O będzie środkiem sfery o. Rozważmy dowolne dwa punkty styczności X i Y oraz płaszczyznę π zawierającą P, X i Y. Niech $u = o \cap \pi$ będzie okręgiem wycinanym przez π, zaś U jego środkiem. Punkt O jest równoodległy od punktów u, więc jego rzut również (tw. Pitagorasa), zatem U jest rzutem O na π. Skoro $XO \perp PX$ i $OU \perp \pi \supseteq PX$, to $UX \perp PX$. Podobnie $UY \perp PY$. Skoro tak, to PX i PY są styczne do okręgu o, więc $PX = PY$. □

III dowód. Niech O oznacza środek sfery o i niech o_2 będzie sferą o środku w środku odcinka OP i promieniu takim, że $O \in o_2$. Wtedy $P \in o_2$. Niech X będzie dowolnym punktem styczności, wtedy $\sphericalangle PXO = 90°$, więc $X \in o_2$.

Skoro tak, to zbiór punktów styczności jest okręgiem, który jest przecięciem sfer o i o_2 (*pomyśl o tym, dlaczego przecięcie dwóch sfer jest okręgiem dostatecznie długo, by wydało się to oczywiste, przynajmniej „na rysunku”*). Niech $u = o \cap o_2$ oznacza ten okrąg. Sfery o i o_2 nie zmieniają się przy obrocie wokół OP, więc również u nie zmienia się przy tym obrocie. A to znaczy, że środek u leży na OP i u leży w płaszczyźnie prostopadłej do OP.

Styczne z punktu P do o to odcinki łączące P z punktami u, czyli tworzące pewnego stożka, które mają równe długości (*to prosty wniosek z Pitagorasa*). □

Prawdziwa siła tego twierdzenia wynika z faktu, że, w przeciwieństwie do płaszczyzny, stycznych jest nieskończenie wiele.

Zadanie 10
Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w P zaś do ściany ABD w Q. Uzasadnij, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB$. Dowiedź także, że $\sphericalangle APC = \sphericalangle BQD$.

Narysuj wszystkie punkty styczności sfery i sprawdź, które kąty przy tych punktach są równe!

Zadanie 11 ⋆
Zdefiniuj sferę dopisaną do ściany ABC czworościanu $ABCD$ i dowiedź, że sfera ta istnieje.

Zadanie 12
Niech s będzie sferą wpisaną w czworościan $ABCD$, zaś s' będzie sferą dopisaną do ściany ABC tego czworościanu. Niech P, Q będą punktami styczności sfer s, s' do płaszczyzny ABD. Uzasadnij, że punkty P, Q, D są współliniowe.

Zadanie 13
Czy rzut środka sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ na ścianę ABC jest środkiem okręgu opisanego na ABC? Czy rzut środka sfery wpisanej w $ABCD$ jest środkiem okręgu wpisanego?

Miscellanea i zadania z OMów

Zadanie 14
Okręgi wpisane w ściany ABC i ABD czworościanu $ABCD$ są styczne do krawędzi AB w tym samym punkcie. Wykaż, że punkty styczności tych okręgów z krawędziami AC, BC oraz AD, BD leżą na jednej sferze.

Zadanie 15 ⋆
W czworościanie $ABCD$ krawędź AB jest prostopadła do krawędzi CD i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Udowodnij, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź AB i środek krawędzi CD jest prostopadła do krawędzi CD.

Zadanie 16 59 OM
Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, będącej czworokątem wypukłym. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do $ABCD$ w P. Uzasadnij, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180°$.

Zadanie 17 61 OM
Punkty A', B', C' są odpowiednio rzutami prostokątnymi wierzchołków A, B, C czworościanu $ABCD$ na przeciwległe ściany. Dowieść, że jeżeli punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD, punkt B' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD, zaś punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Zadanie 18
Niech I będzie środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Punkt I' leży na odcinku DI. Uzasadnij, że odległości I' od ścian ABD, BCD, CAD są równe.

Zadanie 19 61 OM
Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej ℓ leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na tym czworościanie. Udowodnij, że jeśli prosta ℓ przecina odcinek AB, to $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Zadanie 20
Niech M będzie środkiem ciężkości ściany ABC czworościanu $ABCD$. Uzasadnij, że objętości czworościanów $ABMD$, $BCMD$ i $CAMD$ są równe.

Zadanie 21 63 OM
Udowodnij, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD, BCD i CAD są równe.

Zadanie 22 62 OM
W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykaż, że jeśli dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

Wskazówki do zadań

Wskazówka 1
Jeżeli wierzchołki mają współrzędne (w jakimkolwiek układzie) (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C), (x_D, y_D, z_D), to środek ciężkości ma współrzędne

$$\left(\frac{\sum x_i}{4}, \frac{\sum y_i}{4}, \frac{\sum z_i}{4}\right).$$

Wskazówka 2
Płaszczyzna symetralna odcinka AB to płaszczyzna przechodząca przez środek AB i prostopadła do AB. Z drugiej strony płaszczyzna ta to *zbiór punktów równoodległych od A i B*. Tę ważną własność warto sprawdzić lub choć zapamiętać. Mając ją, przecinamy trzy symetralne i uzasadniamy, że pozostałe trzy przechodzą przez punkt przecięcia. Dlaczego trzy symetralne mają punkt przecięcia (nie ma problemów z równoległością)? Gdyby nie, to czworościan złożyłby się do płaskiego.

Wskazówka 3
Na początek trzeba skonstruować dwusieczną. Łatwiej to zrobić niż zapisać … Niech π i π' będą dwoma półpłaszczyznami przecinającymi się na prostej m. Niech σ będzie płaszczyzną prostopadłą do m, załóżmy, że przecina ona π w półprostej l i π' w półprostej l'. *Płaszczyzna dwusieczna* kąta dwuściennego pomiędzy π i π' to płaszczyzna zawierająca m i dwusieczną kąta pomiędzy półprostymi l i l'. Konstrukcja nie zależy od wyboru σ.

Teraz, podobnie jak w poprzednim zadaniu, trzeba sprawdzić, że płaszczyzna dwusieczna kąta to zbiór tych punktów wewnątrz kąta, które są równoodległe od obu ścian kąta.

Wskazówka 4
To ważne zadanie dobrze pokazuje metodę manipulacji prostopadłością. Jak zwykle warto wyobrazić sobie rysunek.

Niech H' oznacza rzut A na ℓ. Wtedy $AH' \perp \ell$ z definicji. Z drugiej strony $AH \perp \ell$, gdyż $AH \perp \pi$ a ℓ leży w π. Wobec tego proste AH' i AH w płaszczyźnie AHH' są prostopadłe do ℓ, więc cała AHH' jest prostopadła, a stąd $HH' \perp \ell$. To dowodzi, że H' jest rzutem H na ℓ.

Wskazówka 5
Jeżeli rzuty C i D pokrywają się, to, oznaczając rzut przez K, mamy $CK \perp AB$ i $DK \perp AB$, więc cała płaszczyzna CDK jest prostopadła do AB, stąd $CD \perp AB$.

Z drugiej strony załóżmy, że $CD \perp AB$ i niech K będzie rzutem C na AB. Wtedy również CDK jest prostopadła do AB, więc K jest rzutem D na AB.

Wskazówka 6
Wystarczy pokazać, że BH jest prostopadłe do CD (i analogicznie dla CH i DH). Ale $AH \perp BCD$, więc $AH \perp CD$ oraz $AB \perp ACD$, więc $AB \perp CD$. Stąd też $ABH \perp CD$, więc $BH \perp CD$.

Wskazówka 7
Jeżeli l i m leżą w jednej płaszczyźnie, to teza zachodzi trywialnie. Z drugiej strony, jeżeli l i m przecinają się, to leżą w płaszczyźnie zawierającej l i dowolny punkt z m inny niż punkt przecięcia. Jeżeli l i m są równoległe, to leżą w płaszczyźnie zawierającej l i dowolny punkt m.

Wskazówka 8
Na mocy poprzedniego zadania wysokości AH_1 i BH_2 leżą w pewnej płaszczyźnie π. Mamy $AH_1 \perp BCD$ oraz $BH_2 \perp ACD$, więc $\pi \perp CD$. Ale $AB \subseteq \pi$, więc $AB \perp CD$.

Wskazówka 9
Niech J oznacza ortocentrum ABC, zaś H oznacza jego rzut na BCD. Wystarczy pokazać, że $BH \perp CD$, wtedy analogicznie $CH \perp BD$ i mamy tezę. Mamy $BH \perp AC$ i $BH \subseteq ABC \perp AD$, więc $BH \perp CD$.

Wskazówka 10
Z najmocniejszego twierdzenia stereometrii $AP = AQ$ i $BP = BQ$, więc $\triangle ABP \equiv \triangle ABQ$, w szczególności $\sphericalangle APB = \sphericalangle AQB$. Druga równość wynika z pierwszej: najlepiej narysować siatkę czworościanu, zaznaczyć wszystkie 12 kątów (6 par kątów równych) przy 4 punktach styczności sfery wpisanej i sprawdzić, że $\sphericalangle APC = \sphericalangle BQD$ bezpośrednimi obliczeniami. Ostatecznie wśród 12 zaznaczonych kątów są trzy czwórki kątów równych miar.

Wskazówka 11
Sfera dopisana to sfera styczna do trójkąta ABC i płaszczyzn zawierających pozostałe ściany czworościanu $ABCD$ taka, że jej środek leży poza $ABCD$.

By ją skonstruować, trzeba przypomnieć, jak był konstruowany okrąg dopisany: jako przecięcie dwusiecznej kąta i dwusiecznej kąta zewnętrznego. Środek sfery dopisanej leży na przecięciu dwóch dwusiecznych kątów dwuściennych i jednego dwusiecznej kąta zewnętrznego dwuściennego (co to jest?).

Wskazówka 12
Punkty styczności to rzuty środków odpowiednich sfer. Środki te oraz punkt D leżą na pewnej prostej ℓ. Prosta ℓ jest przecięciem dwusiecznych trzech kątów dwuściennych: pomiędzy ABD i BCD, pomiędzy BCD i CAD oraz pomiędzy CAD i ABD.

Wskazówka 13
Rzut środka sfery opisanej jest środkiem okręgu opisanego na mocy twierdzenia Pitagorasa. Dla sfery wpisanej nie jest to prawdą: nieformalnym przykładem jest np. czworościan o pięciu krawędziach równej długości a, zaś piątej krawędzi bardzo krótkiej w porównaniu z a.

Wskazówka 14
Niech π oznacza prostopadłą do AB w punkcie styczności okręgów. Niech proste l_1 i l_2 oznaczają prostopadłe do płaszczyzn ABC i ABD przechodzące przez środki okręgów wpisanych. Wtedy l_1 i l_2 leżą w π, więc przecinają się (dlaczego nie są równoległe?), punkt przecięcia jest środkiem sfery.

Wskazówka 15
Niech M będzie środkiem CD i niech K oznacza rzut C na AB; skoro $CD \perp AB$ to K jest także rzutem D na AB. Wystarczy wykazać, że $KM \perp CD$, innymi słowy, że CKD jest równoramienny.

W tym celu pokażemy, że $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$. Z równości kątów $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ wynika, na mocy twierdzenia sinusów, że promienie okręgów opisanych na $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ są równe. Ponadto odległości wysokości z punktu D i C od B są równe (bo oba spodki wysokości leżą w K). Teraz można uzasadnić przystawanie na kilka sposobów, wybieramy sposób konstrukcyjny: mając dany odcinek AB, punkt K, który jest spodkiem wysokości i okrąg o opisany na trójkącie ABX punkt X jest przecięciem prostej ℓ prostopadłej do AB przechodzącej przez K i o, więc jest wyznaczony jednoznacznie (o ile wiemy, po której stronie AB leży). W szczególności przeprowadzając tę konstrukcję dla $X = C, D$ stwierdzamy, że $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$. Zatem $CK = DK$.

Wskazówka 16
Narysuj siatkę, zaznacz wszystkie punkty styczności i wszystkie kąty równe przy nich i przelicz.

Wskazówka 17
Z twierdzenia Pitagorasa $AB = AC = AD$. Wtedy B' leży na symetralnej CD. Niech H będzie rzutem B na CD, wtedy H pokrywa się z rzutem B' (z twierdzenia o trzech prostopadłych), więc $BC = BD$. Podobnie C' leży na symetralnej BD, więc $BC = CD$. Łącznie czworościan $ABCD$ spełnia $AB = AC = AD = a$ oraz $BC = CD = DA = b$. W szczególności nie zmienia się on przy obrocie o $\pm 60°$ względem AA'. Przy obrocie tym B' przechodzi na C', zaś ściana ACD przechodzi na ABD. To znaczy, że C' jest obrazem środka okręgu wpisanego, więc jest środkiem okręgu wpisanego. Ostatecznie w trójkącie ABD środek okręgu wpisanego i środek ciężkości pokrywają się. Pozostaje sprawdzić, że jest to trójkąt równoboczny. To zadanie z planimetrii.

Wskazówka 18
Teza wynika z twierdzenia Talesa zastosowanego do rzutów I i I' na ścianę czworościanu.

Wskazówka 19
Niech O oznacza środek sfery opisanej na czworościanie, zaś I oznacza środek sfery wpisanej. Punkt I jest równoodległy od płaszczyzn ABC i ABD, więc z tw. Talesa punkt O również jest równoodległy od ABC i ABD. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że okręgi opisane na trójkątach ABC i ABD mają równe promienie. Teraz teza wynika z twierdzenia sinusów (tu stosujemy założenie, że trójkąty są ostrokątne).

Wskazówka 20
Wystarczy pokazać, że trójkąty ABM, BCM i CAM mają równe pola. To wynika z faktu, że M dzieli środkowe w stosunku $2 : 1$.

Wskazówka 21
Załóżmy, że środek ciężkości M leży na prostej łączącej D ze środkiem sfery wpisanej. Korzystając z dwóch zadań stwierdzamy, że odległości M od ABD, BCD i CAD są równe. Niech π będzie płaszczyzną równoległą do ABC przechodzącą przez M i niech A', B', C' będą punktami jej przecięcia z krawędziami DA, DB i DC odpowiednio. Wtedy M jest środkiem ciężkości $A'B'C'$, więc objętości czworościanów $A'B'DM$, $B'C'DM$ i $C'A'DM$ są równe. Korzystając ze wzoru na objętość czworościanu, otrzymujemy, że pola $A'B'D$, $B'C'D$ i $C'A'D$ są równe. Pola te są proporcjonalne do pól ABD, BCD i CAD. Rozumowanie to można odwrócić.

Wskazówka 22
Niech S oznacza wspólny wierzchołek z zadania, zaś punkty A, B i C leżą na krawędziach katów płaskich w odległości s od S. Wtedy dwusieczne ASB, BSC i CSA są również wysokościami i środkowymi w (równoramiennych) trójkątach ADB, BSC i CSA. Oznaczmy przez D, E, F spodki wysokości z S w BCS, CAS i ABS odpowiednio. Niech $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Załóżmy, że SD i SE są prostopadłe, tzn. że $SD^2 + SE^2 = DE^2$. Mamy $SD^2 = s^2 - (a/2)^2$, $SE^2 = s^2 - (b/2)^2$ oraz $DE^2 = (c/2)^2$, więc powyższa równość przepisuje się na $8s^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Łatwo sprawdzić, że prostopadłość dowolnych dwóch dwusiecznych jest również równoważna temu warunkowi.