Czy wiesz, co to średnie?

Teoria

1. Jeżeli liczby $a_1, \cdots, a_n$ są dodatnie, to

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

2. Dla dwóch liczb wygląda to nieco niewinniej: Jeśli $a, b > 0$, to

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

3. Do rządzenia służy tzw. średnia ważona:
Jeżeli liczby $a_1, \cdots, a_n, w_1, \cdots, w_n$ są dodatnie, i $w_1 + \cdots + w_n = 1$, to:

$$\frac{1}{\frac{w_1}{a_1} + \cdots + \frac{w_n}{a_n}} \leq a_1^{w_1} a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n} \leq w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n$$

Zadania

1. Pokaż, że dla $a_1, a_2, \cdots, a_n$ - jednego znaku, zachodzi $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

2. Pokaż, bez głupich obliczeń, że jeżeli $a, b, c > 0$, to $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

3. Analogicznie jak powyżej, udowodnij, że $(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2)$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c dodatnich zachodzi

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

5. Udowodnij, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ jest

$$4b^2 + a^2 \geq 4ab$$

6. Udowodnij, że dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jest

$$abcd - \frac{1}{16} \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^4}{4} + \frac{c^8}{8} + \frac{d^{16}}{16}$$

7. Rozstrzygnij, jaka jest największa stała C, taka, że dla wszystkich dodatnich x, y, z jest

$$x + 2y + 3z \geq C x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{2}}$$

8. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ zachodzi

$$a + b + c + d \geq \frac{15}{2^{\frac{34}{15}}} \sqrt[15]{ab^2c^4d^8}$$

9. Pokazać, że jeśli $a, b, c > 0$, to $a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c \geq 3((ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}})$

10. Pokazać, że jeżeli $x, y, z > 0$, to

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}$$

11. (Czy pamiętasz co się robi w trójkątach?) Wykaż, że jeżeli a, b, c - boki pewnego trójkąta, to

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

12. Liczby dodatnie a, b, c, są takie, że $a+b+c=1$. Wykazać, że

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{12abc} \leq 1$$

13. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a+b+c=1$, to

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

14. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca=abc$. Dowieść, że:

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(a^3+c^3)} \geq 1$$

15. Niech $a_1, \cdots, a_n$ będą liczbami dodatnimi spełniającymi warunek $a_1a_2\cdots a_k \geq 1$ dla każdego $1 \leq k \leq n$. Udowodnić, że:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots \frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < 2$$

16. (*) Niech $a_1, \cdots, a_n$ - liczby dodatnie, zaś S - ich suma. Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność $\sum_{i=1}^{n} \frac{S-a_i}{a_i} \geq (n-1)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i}$