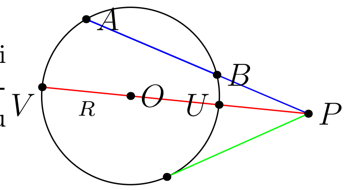
Sieknijmy!

rozwiązania

kółko I LO Białystok
11 października 2013

Zadanie 1 Twierdzenie o siecznych



Dany jest okrąg o o środku O i promieniu R oraz punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i przecina okrąg o w (niekoniecznie różnych) punktach A i B, to iloczyn $|PA| \cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a dokładniej

$$|PA| \cdot |PB| = \left||PO|^2 - R^2\right|.$$

Zadanie 2

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest rzutem A na BC, zaś punkt E jest rzutem B na AC. Uzasadnij, że $CE \cdot CA = CD \cdot CB$. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości $\triangle ABC$. Które z liczb

$$DH \cdot HA, \quad AH \cdot AD, \quad AE \cdot CA, \quad EH \cdot BH,$$

są równe?

Rozwiązanie.

Skoro $\triangle ABC$ jest ostrokątny, to $DH < AD$, stąd $DH \cdot HA < AH \cdot AD$. Pokażemy, że $DH \cdot HA = EH \cdot HB$ oraz $AH \cdot AD = AE \cdot CA$, będą to więc jedyne równości.

Skoro $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BEA = 90°$, to na czworokącie $ABDE$ da się opisać okrąg. Przekątne AD i BE przecinają się w H, więc $AH \cdot HD = HE \cdot HB$ z twierdzenia o siecznych.

Podobnie, $\sphericalangle HDC = \sphericalangle HEC = 90°$, więc punkty H, D, C, E leżą na jednym okręgu. Z twierdzenia o siecznych mamy $AE \cdot AC = AH \cdot AD$.

Zadanie 3

Punkt P leży na przecięciu stycznych wypuszczonych z punktów A i B leżących na okręgu o środku w O. Punkt K jest środkiem odcinka AB. Uzasadnij, że zachodzi $PA^2 = PK \cdot PO$.

Rozwiązanie.

Skoro K jest środkiem cięciwy AB, to $OK \perp AB$, czyli $\sphericalangle AKO = 90°$ i środek okręgu opisanego na $\triangle AKO$ leży na AO. Wobec tego PA jest styczną do tego okręgu i z twierdzenia o siecznych (a konkretniej o siecznej i stycznej) mamy $PA^2 = PK \cdot PO$.

Zadanie 4

Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A, B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $\sphericalangle PXY = \sphericalangle PYX$.

Rozwiązanie.

Skoro punkt P leży na AB to

$$PX^2 = PA \cdot PB = PY^2,$$

stąd $|PX|^2 = |PY|^2$, $|PX| = |PY|$, więc trójkąt PXY jest równoramienny, co kończy dowód.

Zadanie 5 Kryterium współokręgowości

Jeżeli punkty S, A, B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o początku w S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Rozwiązanie.

"wtedy".

Jeżeli A, B, C, D leżą na jednym okręgu, to $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$.

"tylko wtedy".

Załóżmy zatem, że $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$. Okrąg opisany na A, B, C przecina półprostą SC w punkcie D' (gdy jest on styczny przyjmujemy $D' = C$). Korzystając z implikacji "wtedy" obliczamy $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$.

Łącznie $|SC| \cdot |SD| = |SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD'|$, czyli $|SD| = |SD'|$, $D = D'$.

Zadanie 6

Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MB \cdot ME = MC \cdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

Rozwiązanie.

Skoro $MB \cdot ME = MC \cdot MF$ to (z powyższego kryterium) B, E, C, F leżą na jednym okręgu o, a skoro tak to $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

Zadanie 7 ⋆

Dane są okręgi o_1, o_2 przecinające się w dwóch punktach leżących na prostej m oraz punkt P. Półproste k i l mają początek w P i przecinają: k okrąg o_1 w A, B, zaś l okrąg o_2 w C, D (punkty A, B, C, D są parami różne). Udowodnić, że na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy P leży na prostej m.

Rozwiązanie.

Oznaczmy punkty przecięcia przez X, Y. Jeżeli P leży na XY, to $PA \cdot PB = PX \cdot PY = PC \cdot PD$ z twierdzenia o siecznych dla o_1, o_2.

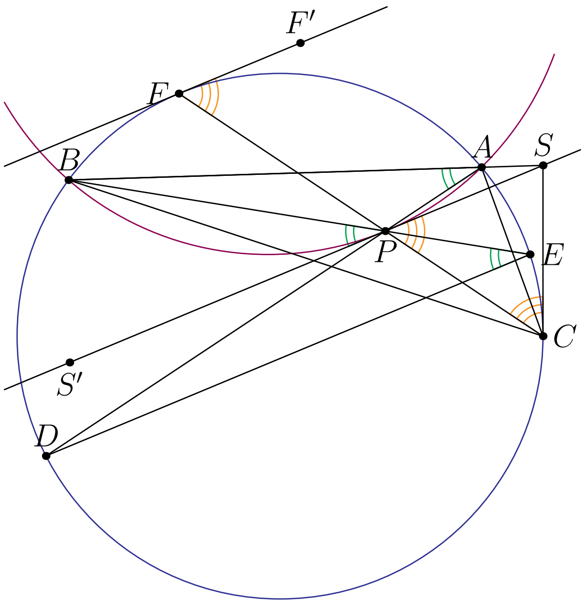
Jeżeli zaś $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, to oznaczamy przez Y' drugi punkt przecięcia prostej PX z o_1. Wtedy $PX \cdot PY' = PA \cdot PB = PC \cdot PD$, więc C, D, X, Y' leżą na jednym okręgu — o_2. Skoro tak, to Y' leży na o_1 i o_2, więc $Y' = Y$.

Uwaga: jest tutaj nieco niewyjaśnionych delikatności, np. dlaczego $Y' \neq X$?

Zadanie 8

Punkt P leży wewnątrz nierównoramiennego trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany w punktach D, E, F (przy czym $D \neq A, E \neq B, F \neq C$). Styczna do okręgu opisanego w punkcie C przecina AB w punkcie S takim, że $CS = SP$. Uzasadnij, że SP jest styczną do okręgu opisanego na $\triangle ABP$ oraz że $FD = FE$.

Rozwiązanie.



Skoro SC jest styczną to $SC^2 = SA \cdot SB$. Wobec tego również $SP^2 = SA \cdot SB$. Oznaczmy drugi punkt przecięcia prostej SP z okręgiem opisanym na $\triangle ABP$ jako P'. Wtedy $SP \cdot SP' = SA \cdot SB = SP^2$, czyli $P' = P$ i jest SP jest styczną.

Aby udowodnić, że $FD = FE$ wystarczy (i potrzeba) wykazać, że styczna do okręgu opisanego na $\triangle ABC$ w punkcie F jest równoległa do ED. Udowodnimy, że obydwie te proste są równoległe do PS.

Dla uproszczenia zapisu niech S' leży na PS po innej stronie P niż S. Mamy, używając twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym $\sphericalangle BED = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BPS'$, stąd $PS' \parallel DE$.

Oznaczmy przez F' punkt na stycznej do F leżący „po przeciwnej stronie niż B". Obliczamy

$$\sphericalangle F'FC = \sphericalangle F'FA + \sphericalangle AFC = \sphericalangle FCA + \sphericalangle ACS = \sphericalangle SCP = \sphericalangle SPC,$$

gdzie stosujemy twierdzenie o kącie wpisanym i dopisanym oraz, w ostatnim przejściu, założenie $SC = SP$. Wobec powyższej równości mamy $PS \parallel FF'$, co kończy dowód.

Wszystkie powyższe triki ze styczną da się przepisać na kąty. Ale po namyśle uważam, że nie ma najmniejszych szans zobaczyć tych kątów bez dobrego rysunku :) I to dlatego zadanie było trudne...