Różności

kółko I LO Białystok
4 grudnia 2012

Wiele z poniższych zadań jest wziętych z Koła Podlaskiego Oddziału PTM `www.ptm.pb.edu.pl` *prowadzonego przez prof. Piotra Grzeszczuka.*

Zadanie 1
Czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie x, y, że $x^2 + y$ oraz $y^2 + x$ są kwadratami liczb naturalnych?

Zadanie 2 Twierdzenie o dwusiecznej II
W trójkącie $\triangle ABC$ zachodzi $AB \neq AC$. Dwusieczna kąta zewnętrznego $\sphericalangle BAC$ przecina prostą BC w punkcie E. Uzasadnij, że
$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}.$$

Zadanie 3
Liczba A powstała z B przez przestawienie pewnych cyfr. Wykazać, że jeśli $A + B = 10^{10}$, to liczba A jest podzielna przez 10.

Zadanie 4
W trójkąt wpisano okrąg. Wykazać, że punkty styczności tego okręgu z bokami trójkąta są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Zadanie 5
Ciąg liczb naturalnych $a_1 < a_2 < \ldots$ spełnia warunki $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} \leqslant 2n$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją wyrazy tego ciągu różniące się o n.

Zadanie 6
Na prostej ℓ danych jest 50 odcinków. Wykazać, że prawdziwe jest przynajmniej jedno z następujących zdań:

1. pewne osiem odcinków ma punkt wspólny,
2. istnieje osiem odcinków parami rozłącznych.

Zadanie 7
Liczby dodatnie a, A, b, B, c, C spełniają równości
$$a + A = b + B = c + C = k.$$
Wykazać, że $aB + bC + cA \leqslant k^2$.