# Różności część II

1. Czy wyrażenie $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$, o którym wiemy, że jest liczbą rzeczywistą, jest liczbą naturalną?

2. Udowodnij, że istnieje taka liczba $c$, dla której równanie $[x\sqrt[3]{x}]+[y\sqrt[3]{y}]=c$ ma co najmniej 17032011 rozwiązań w liczbach naturalnych $x, y$ ($[A]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od $A$).

3. Udowodnij, że każda liczba wymierna z przedziału $(0, 1)$ daje się zapisać jako suma ułamków "egipskich" tj. o licznikach równych 1 i mianownikach będących różnymi liczbami naturalnymi, np.
$$\frac{5}{13}=\frac{1}{3}+\frac{1}{20}+\frac{1}{720}.$$

4. Wykaż, że jeśli $n$ jest liczbą całkowitą dodatnią, to
$$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leqslant 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

5. Udowodnij, że jeśli $a, b, c$ są długościami boków trójkąta, to
$$\sqrt{-a+b+c}+\sqrt{a-b+c}+\sqrt{a+b-c} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

6. Dowiedź, że dla dodatnich liczb $a, b, c$ zachodzi nierówność
$$\frac{2a+1}{b+c+1}+\frac{2b+1}{a+c+1}+\frac{2c+1}{a+b+1} \geqslant 3.$$

7. Suma nieujemnych liczb $x_1, \ldots, x_n$ wynosi 1. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia
$$x_1 \cdot \sqrt{x_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x_n}.$$

Źródło: V LO w Bielsku Białej (część zadań)