Triki z nierówności ami

1. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$\frac{\sqrt{a^2bc}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{abc^2}+(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt{3}$$

2. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2}$$

3. * Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi, że $abc = 1$. Pokazać, że

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

4. Niech a, b będą liczbami dodatnimi, takimi, że $a + b = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

5. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+a^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}$$

6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność Nesbitta

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b} \geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)$$

8. Niech $n > 3$ będzie liczbą naturalną, a liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą dodatnie. Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq n$$

gdzie suma jest cykliczna, tj. $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$.